代数学幾何学演習 II (小テスト 2003/12/05 午前クラス の解答案)

栗野 俊一

2003 年 12 月 19 日 (Ver 0.01)

ユニタリ行列 (直交行列) を用いて対角化せよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[**解答例**] 次の手順で、問題を解く。

固有値 固有方程式を解き、固有値を求める。

固有ベクトル 固有ベクトルを求め、正規直交化する。

ユニタリ行列 固有ベクトルを利用してユニタリ行列とその逆行列を求める。

対角化 ユニタリ行列を用いて、与えられた行列を対角化する。

以下、与えられた行列 A で表す。

固有値 まず、固有多項式を求めると、次のようになる。

定義より、行列 A の固有多項式は次のようになる。

$$\Phi_A(x) = |A - xE|$$

よって、これを計算すると、

$$\begin{aligned}
\Phi_A(x) &= |A - xE| && (1) \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{vmatrix} && (2) \\
&= \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 3 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 3 & 0 & -1-x \end{vmatrix} && (3) \\
&= (-1-x)(2-x)(-1-x) + 0 \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot 0 && (4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -3\cdot(2-x)\cdot 3-0\cdot 0\cdot(-1-x)-(-1-x)\cdot 0\cdot 0 && (5)\\
= \quad & (-1-x)(2-x)(-1-x)-9(2-x) && (6)\\
= \quad & (2-x)\{(1+x)^2-3^2\} && (7)\\
= \quad & (2-x)\{((x+1)+3)((x+1)-3)\} && (8)\\
= \quad & (2-x)\{(x+4)(x-2)\} && (9)\\
= \quad & -(x-2)^2(x+4) && (10)\\
& && (11)
\end{aligned}
$$

これより、固有方程式は

$$-(x-2)^2(x+4)=0$$

これを解くと、解は、

$$x=2(\text{重解}),-4$$

となるので、行列 A の固有値は、次のようになる。

$$\text{固有値 } 2,-4$$

固有ベクトル 固有値がわかったので、これを利用して、固有ベクトルを求める。

固有値 2 に対応する固有ベクトル 固有値 2 に対応する固有ベクトルが所属する固有空間 W_2 は、次のように与えられる。

$$W_2=\{v\in V^3|Av=2v\}$$

ここで、固有ベクトル v 要素を x_1,x_2,x_3 とすれば、これらに関する方程式を立てることができ、それは次のようになる。

$$
\begin{aligned}
Av-2v &= 0 && (12)\\
Av-2Ev &= 0 && (13)\\
(A-2E)v &= 0 && (14)\\
\left(\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&2&0\\3&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&3\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} &= 0 && (15)\\
\begin{pmatrix}-1-2&0&3\\0&2-2&0\\3&0&-1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} &= 0 && (16)
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{17}$$

よって、

$$\begin{cases} -3x_1 & +0x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +0x_2 & -3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

ここで、二つ目の等式は意味がない[1] し、一つ目の式と三つ目のは同じ[2] なので結局、

$$x_1 = x_3$$

のみが、固有空間 W_4 を定める条件となる。すなわち、

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in R \right\}$$

である。

変数が 3 つで、条件式が 1 つなので、この W_2 の次元は 2 (3 - 1) となりこれから、独立なベクトルを 2 つ取ることができる[3]。

そこで、できるだけ、要素の中に 0 が多くなるよう[4] に、次のような二つのベクトルを取る。

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (t_1 = 1, t_2 = 0) v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (t_1 = 0, t_2 = 1)$$

これが、固有値 2 に対応する 行列 A の固有ベクトルである。

この固有ベクトルは、ユニタリ行列を作るために、利用しなければならないので、正規直交化を行う必要がある[5]。

本来ならば[6]、ここで、シュミットの直交化法を適用すべきだが、良くみると、既に、v_1 と v_2 は、直交している[7]。

[1] ここでは、この式 ($0 = 0$ は、連立方程式の変数 x_1, x_2, x_3 に対する制限条件となっていないという意味で、「無意味」だと称しているにすぎない。この等式も、「固有空間 W_2 を定める条件の一つという」意味では重要なのだが、$0 = 0$ という条件は常に成立するので、以下 (成立する以上は..) 考慮する必要がないというだけである。逆に、もし、この式が $0 = 1$ の様に、逆に、常に成立しないような式であれば、逆に W_2 が空集合 (この条件を満す要素がないので..) ということを表現しているので、重用度は、当然、他の式と同じ位いある。

[2] 一つ目の式の全体に (-1) を掛ければ、三つ目の式と同じになる。

[3] この 2 つのベクトルは、互いに独立で、その個数が W_2 の次元 (2) に等しいわけであるから、実は、固有空間 W_2 の基底になっている。

[4] これは、「計算を楽にする」ための典型的なテクニックである。

[5] 上記の注にあるように、元々この 2 つのベクトルは W_2 の基底になっていたわけであるから、それを正規直交化した結果は、 W_2 の正規直交基底になるわけである。

[6] このように、「本来なら沢山の計算 (この場合は、シュミットの直交化法) をしなければならない」くても、具体的な数が与えられている場合は、愚直に規則を適用するのではなく、柔軟に扱ってよい。そのために、日頃、「簡単で済ませてよいパターン」というのを身に付けておく必要がある。

[7] 内積 (v_1, v_2) を計算してみると、次のように 0 になっているので、直交していることがわかる。

従って、正規化だけを行えばよい。更に、v_2 は、既に、正規化されている[8]。したがって、v_1 のみを正規化すればよい。これは、v_1 を $|v_1|$ で割るだけである。

$$\begin{aligned} |v_1| &= \sqrt{(v_1, v_1)} && (30)\\ &= \sqrt{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)} && (31)\\ &= \sqrt{(1\cdot\overline{1}+0\cdot\overline{0}+1\cdot\overline{1})} && (32)\\ &= \sqrt{1+0+1} && (33)\\ &= \sqrt{2} && (34)\\ & && (35) \end{aligned}$$

よって、W_2 の正規直交基底 u_1, u_2 は、次のように与えられる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

固有値 -4 に対応する固有ベクトル 固有値が 2 と同様にして固有空間 W_{-4} に所属するベクトル v の要素 x_1, x_2, x_3 に関する連立方程式をたてると、次のようになる[9]。

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) &= \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) && (18)\\ &= (1\cdot\overline{0}+0\cdot\overline{1}+1\cdot\overline{0}) && (19)\\ &= 0+0+0 && (20)\\ &= 0 && (21)\\ & && (22) \end{aligned}$$

[8]実際に $|v_2|$ を計算すると、次のように 1 になっていることがわかる。

$$\begin{aligned} |v_2| &= \sqrt{(v_2, v_2)} && (23)\\ &= \sqrt{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)} && (24)\\ &= \sqrt{(0\cdot\overline{0}+1\cdot\overline{1}+0\cdot\overline{0})} && (25)\\ &= \sqrt{0+1+0} && (26)\\ &= \sqrt{1} && (27)\\ &= 1 && (28)\\ & && (29) \end{aligned}$$

[9]ここで、最初と最後は同じ式なので、結局、有効な式は二つになり、W_{-4} の次元は、1 となり、独立したベクトル (W_{-4} の基底となる) は 1 つ

$$\begin{array}{cccccc} 3x_1 & +0x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 0x_1 & +6x_2 & +0x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +0x_2 & +3x_3 & = & 0 \end{array}$$

よって、これを解くと、次のようになる。

$$\begin{cases} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & 0 \end{cases}$$

よって、固有空間 W_{-2} は次のようになる。

$$W_{-4} = \left\{ \left(\begin{array}{c} t_1 \\ 0 \\ -t_1 \end{array} \right) \middle| t_1 \in R \right\}$$

ここから、0 でないベクトル v_3 を取る。例えば、$t_1 = 1$ とすれば、

$$v_3 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right)$$

となる。同様に正規直交化しなければならないが、一つしかないので、直交は保証されているので、正規化のみを行えばよい。

よって、

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right)$$

よって、これから、次のような R^3 の正規直交基底となる[10]固有ベクトルを求めることができた。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right)$$

ユニタリ行列 ユニタリ行列 (U) は、上記の正規直交化された固有ベクトル (u_1, u_2, u_3) が与えられれば簡単に作成できる。

$$U = (u_1 u_2 u_3) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right)$$

しか取れないことが解る。

[10] u_1, u_2, u_3 が正規であることは明かであるが、「直交」で、かつ「基底」であることは、本来示す必要がある。ところが、W_2 と W_{-4} が、直交しているために、u_1, u_2 と u_3 が直交し、、独立になることが自然に示される。さらに、u_1 と u_2 も、直交化済みである。最後に、R^3 の次元が 3 なので、独立な 3 つのベクトルがあれば、それは基底となるので、結局、u_1, u_2, u_3 は、R^3 の正規直交基底となるわけである。

また、U の 逆行列 U^{-1} は、U がユニタリ[11] なので U^* に等しい[12]。

したがって、U^{-1} は次のように求めることができる。

$$
\begin{aligned}
U^{-1} &= U^* && (36)\\
&= \overline{{}^tU} && (37)\\
&= \overline{{}^t\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} && (38)\\
&= \overline{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} && (39)\\
&= \begin{pmatrix} \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}} & \overline{0} & \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}} & \overline{0} & \overline{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{pmatrix} && (40)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} && (41)\\
& && (42)
\end{aligned}
$$

対角化 既に、対角化のための行列 U が与えられ、その逆行列 U^{-1} が求まっているので、後は計算するだけである。

$$AU = U\Lambda$$

より、

$$\Lambda = U^{-1}AU$$

なので、対角変化行列 (Λ) は、次のように計算される[13] 。

$$\Lambda = U^{-1}AU \qquad (43)$$

[11]正規直交基底を並べて作られた行列はユニタリ行列になる。

[12]これが、わざわざ、固有ベクトルを元めた後に、正規直交化の労を取った理由である。直交化を行う行列 V を、正規直交化しない固有ベクトル v_1, v_2, v_3 を並べて作成し、これの逆行 V^{-1} をを素直に、(ガウスの消去法等を用いて) 計算しても構わないが、それは計算が大変である。

[13]実際には、この行列の計算を行わなくても、計算結果となる Λ は、対角要素に固有値が並ぶ対角行列になることは分っている。

もちろん、並びかたにバリエーションがあるので、簡単に、どれとはいえないが、これは U を決める時の、固有ベクトルの並びによって、確定するので、簡単に判断できる (つまり、左から固有ベクトルを並べてゆくと、そのベクトルに対応した固有値が、左からならぶ。今回の例では、$U = (u_1 u_2 u_3)$ と並べたので、それぞれ、u_1, u_2, u_3 に対応した固有値 $2, 2, -4$ が対角要素として並ぶことになる。)。

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$\tag{46}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 & -i & -1 \\ i & 5 & -i \\ -1 & i & 3 \end{pmatrix}$$

[**解答例**]

1 スペクトル分解

スペクトル分解を求めよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

[**解答例**] 解答は、以下のようになります。

固有多項式 $x^3 - 12x + 16$

固有値 $2, -4$

固有ベクトル

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ユニタリ行列

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -2\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ユニタリ行列の逆行列

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -2\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

射影子 2 の 射影子

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -2\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -2\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

-4 の 射影子

$$P_{-4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -2\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 1 & -i \\ -i & 0 & i & 1 \\ 1 & -i & 0 & i \\ i & 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

[**解答例**] 解答は、以下のようになります。

固有多項式 $(x-1)^3(x+3)$

固有値 $1, -3$
固有ベクトル

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} u_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

ユニタリ行列

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

ユニタリ行列の逆行列

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

射影子 固有値が二つあるので二つの射影子がある。

1 の 射影子

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i & 1 & -i \\ i & 0 & i & 1 \\ 1 & -i & 0 & i \\ i & 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

-3 の 射影子

$$P_{-3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ i & 1 & -i & -1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

2 実交代行列の固有値

実交代行列の固有値は全て純虚数または 0 であることを示せ。