代数学幾何学演習II (対角化)

栗野 俊一*

2007年9月19日†

1 対角化

1.1 対角行列

正方行列 A が、対角行列ということは、対角要素以外の要素が全て、 0 である場合を言う。

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで、対角要素 $a_{11} = 3, a_{22} = 2, a_{33} = -1$ 以外の要素が全て 0 になっていることを注意しよう。

1.2 対角化すること

対角行列以外の行列 A が与えられた時に、ある正則行列 V と、対角行列 Λ を見つけ出し、$\Lambda = V^{-1}AV$ を満すようにできたとき、「行列 A は、V 利用して、Λ と対角化された」という[1]。

したがって、「対角化せよ」と言われた場合は、この対角行列 Λ と正則行列 V を具体的に求めればよい[2]。

2 対角化の解法

2.1 対角化の流れ

対角化を行う場合、V をユニタリ行列とするかどうかを決める必要がある[3]。

特に、問題に「ユニタリ行列を使って」とある場合は、これを使わなければならないが、そうでなければ、別にユニタリ行列にする必要はない[4]。

---

*日本大学理工学部数学科 (kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp)

†4 年振に内容をみたら細かい所で誤りが沢山あったので、訂正した

[1] このような Λ と V の組は複数組あることに注意しよう。

[2] 狭い意味では、行列 A から、このような対角行列 Λ を求めることが「対角化」であり、V は不要なのだが、通常に問題がでる場合は、V も一緒に求められることが多い。

[3] それによって、手順が異なる。

[4] もし、V をユニタリにしない場合は、V^{-1} の計算が面倒になるので、V^{-1} を計算するのであれば、ユニタリにした方が簡単になる。

しかし、後で述べるように、「対角化」の場合は、実際には、V^{-1} を計算する必要はない。

2.1.1　ユニタリ行列を利用しない場合

ユニタリ行列を利用しない場合の手順は以下のようになる。

1. 固有値を求める (例えば、$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ としよう)。
2. 固有ベクトルを求める (例えば、v_1, v_2, v_3 としよう)。
3. 固有ベクトルを縦ベクトルとする行列 $V = (v_1, v_2, v_3)$ を作る[5]。
4. V の逆行列 V^{-1} を計算する。
5. $\Lambda = V^{-1}AV$ を計算する。この Λ が、対角行列となる。

実は、計算してみると解るのだが、Λ は、対角要素に、固有値 $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_3$ が並んだ行列となっている。 したがって、実際には、固有値と固有ベクトルの二つが求められた時点で、解となる、対角行列と、対角を行うための行列の二つが分っており[6]、その後の逆行列の計算や、実際の対角行列の積の計算は (結果的に..) 不要になる。

したがって、問題としては、通常 V^{-1} を具体的に求めるように要求されたることが多い。その場合は、V^{-1} の計算を楽にするために、特に、指示されてなくても、次のユニタリ行列を利用する方法を選んだが方が結果的に計算が楽になる。

2.1.2　ユニタリ行列を利用する場合

V をユニタリ行列にする場合の手順は、次のようになる。

1. 固有値を求める (例えば、$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ としよう)。
2. 固有ベクトルを求める (例えば、v_1, v_2, v_3 としよう)[7]。
3. 固有ベクトルを正規直交化する[8]。(例えば、u_1, u_2, u_3 としよう)
4. 正規直交化された固有ベクトルを縦ベクトルとする行列 $U = (u_1, u_2, u_3)$ を作る[9]。
5. U の逆行列 U^{-1} を計算する替りに $U^* = \overline{{}^tU}$ を計算する。実は、この U^* は U^{-1} に等しい[10]。
6. $\Lambda = U^{-1}AU = U^*AU$ を計算する。この Λ が、対角行列となる。

V をユニタリを利用する場合は、途中で、固有ベクトルの正規直交化の作業が余分に必要となる。その替りに、最後に V^{-1} を計算する時に V^* の計算だけで済むので、そこでサボれる。

固有ベクトルの正規直交化と、V^{-1} のどちらが大変かと言えば、一般には、後者の V^{-1} の方がずっと、大変なので、「V^{-1} が必要ならばユニタリを利用した方がよい」ということになる。

[5]この V が、A を対角化するために利用される正則行列となる。

[6]もちろん、λ_i や、v_i を求める計算が正しければという前提である。実際に、計算が正しかったかど うかは、具体的に、V^{-1} や、Λ を計算し、確認しなければならない。

[7]ここまでは、ユニタリ行列を利用するしないにかかわらず同じである。

[8]ベクトルの正規直交化のためには、シュミットの直交化技法を利用する。

[9]この U が、A を対角化するために利用される正則行列となるという点は、上と同じだが、ポイントは、それと同時にこの U がユニタリ行列になるという点である。これは、u_1, u_2, u_3 を正規直交化した御陰である。

[10]U がユニタリであることから $U^* = U^{-1}$ が成立する。したがって、ここでやっていることも、実は、上と同じ U^{-1} を計算しているという点で同じ作業を行っていることがわかる。ただ、U^{-1} を計算するより、U^* を計算する方がずっと、簡単にできるというだけである。

2.2 固有値の計算

固有値を求めるためには、固有方程式 $\Phi_A(x)=0$ の根を求めればよい。固有多項式 $\Phi_A(x)$ の定義は、$|A-xE|$（E は単位行列）となるので、結局は、行列式の計算に帰着することに注意しよう。

固有方程式 $\Phi_A(x)=0$ の根は、一般に実数になるという保証はない。もし、実線型空間で固有値を求める場合は、それがたとえ固有方程式の根であっても、複素根は、固有値とはならないことに注意する[11]。

固有方程式 $\Phi_A(x)=0$ の根が重根になる場合もありえる。方程式の根としては、重根かそうでないかは意味があるが、固有値としては重根であるか単根であるかは意味がない[12]。したがって、固有値を示す場合は、多重度を述べないことに注意しよう。

固有方程式が三次以上の場合、その根を求めるのは、公式を利用しても大変である。そこで、因数定理 (α が方程式 $f(x)=0$ の根であれば、$f(\alpha)=0$ であること）を利用し、具体的な α に関して $f(\alpha)$ を計算し、0 になっているかどうか調べてみる。

ここで、闇雲に α を代入しても意味がない。しかし、もし、$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ の根が全て整数の根 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ であるならば、$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ と因数分解できるので、$a_0=(-1)^n\Pi_{i=1}^n\alpha_i$ となる。つまり、根は、定数項 a_0 の約数（ただし、符号付き）となる。

したがって、ダメ元で、固有多項式 $\Phi_A(x)$ の定数項の約数を、符号が正の場合と負の場合の両方をそれぞれ代入して試してみる。

もし、これでダメなら[13]、根の公式などを利用することを考えなければならない。

2.3 固有ベクトルの計算

固有ベクトルは固有値に対応して定まる。逆に言えば、固有値が異れば、固有ベクトルは異なる。

固有値 λ_1 に対応する固有ベクトル v_1 は、定義から $Av_1=\lambda_1 v_1$ を満す 0 ベクトルでないベクトル[14] となっている。

一般に、v_1,v_2 が、共に A の同じ固有値 λ に対する固有ベクトルであれば、任意のスカラー c に対して、これらの線型和 v_1+v_2 もスカラー倍 cv_1 にかんして、$A(cv_1)=c(Av_1)=c(\lambda v_1)=\lambda(cv_1)$, $A(v_1+v_2)=A(v_1)+A(v_2)=\lambda v_1+\lambda v_2=\lambda(v_1+v_2)$ なので、どちらも固有ベクトルとなることがわかる。

つまり、固有ベクトルは沢山あり、それらの集合は、線型空間になっていることが解る。

そこで、固有値 λ_1 に対して、方程式 $Av_1=\lambda_1 v_1$ 満すベクトル[15] 全体の集合 W_{λ_1}（あるいは、W_1）考え、これを、固有値 λ_1 に対する固有空間と呼ぶ。

ここで、求めたい固有ベクトルは、固有空間の基底になっていることがわかる。

固有空間の次元は、この固有空間の基底の個数となっているが、これは、実は、固有値の多重度以下になっている。逆に言えば、固有値の多重度の個数だけ、独立な基底が取れる可能性がある。

---

[11] 複素線型空間 (エルミート空間) であれば、固有方程式の根 (複素根も含めて) は、全て固有値となる。

[12] 実は、次の固有ベクトルの場合に意味が生じる。固有値が単根の場合は、その固有値に対応した独立な固有ベクトルが一つしか取れないが、重根の場合は、その重根度に対応した個数の独立な固有ベクトル（n 重根の場合は n 本の独立した固有ベクトル）がある可能性がある。

[13] これは、もちろん、一般的の話であるが、課題として提出される場合は、通常、少くても一つ位は、整数の根があるように作られているので...

[14] 任意の λ に対して $A0=0=\lambda\cdot 0$ なので、0 を考えるのは意味がない。

[15] この場合は 0 ベクトルを含んでいることに注意..

固有空間から独立な基底を取るには、具体的に、ベクトル $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の成分 x_1, x_2, x_3 を求める必要がある。

これは、方程式 $(A - \lambda E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ という方程式の解であるので、この連立方程式を解くことになる。

この連立方程式は、三つの独立変数に対して、三つの関係式が与えられているため、解が一意に定まりそう[16]だが、実際は、式が退化[17]する。

その結果として、複数の独立したパラメータ[18] で表示可能なベクトルとなる。

更に、適当にパラーメータの値を定め[19] 、その空間の次元の個数だけ、独立なベクトルを固有空間から選択する。

2.4 固有ベクトル正規直交化

もし、ユニタリ行列を利用するのであれば、ここで、選択した固有ベクトルを直交化する必要がある。

正規化は、全ての固有ベクトルに関係して行う必要があるが、直交化は、同じ固有空間（つまり、同じ固有値に対応する..）から選んだ固有ベクトルだけに着目して行えばよい。

実際の正規直交化の手続きは、グラムシュミットの直交化法を利用する。

2.5 対角化を行う行列

対角化を行う行列は、上記で、求めた固有ベクトルを縦ベクトルとするような行列を作るだけである。

ここで、縦ベクトルを並べる順番は任意だが、その順番を変更すると、最後の対角化を行ったときに並ぶ、対角要素の固有値の順番が異ることに注意する。

なお、もし、固有ベクトルの正規直交化を行っていれば、ここで作られた対角化のための行列が、自動的にユニタリ行列となっていることに注意しよう。

2.6 対角化を行う行列の逆行列の計算

対角化を行うには、逆行列の計算が必要である。もし、ユニタリ行列を利用しないのであれば (つまり、固有ベクトルの正規直交化を行っていないのであれば..)、単純に、逆行列を求めるしかない。

この場合は、ガウスの掃き出し法などを利用することになる。

一方、対角化を行う行列がユニタリ行列になっていれば、単に転置と共役を取るだけで、逆行列が計算できるので、こちらの方法を選ぶ。

[16]その場合、固有ベクトルは 0 ベクトルとなる。

[17]一つの式が他の式の線型和で表現できてしまい、条件として意味がなくなってしまうこと。

[18]その独立したパラメータの個数が、固有空間の次元に等しい。

[19]パラメータとしては、どのような値をとってもよいわけであるが、後の都合を考えて、旨いパラメータを選ぶことが望ましい。一般には、そのパラメータを選んだ結果、そのベクトルの要素に 0 が多くなるものを選ぶのが得策である。

2.7　対角化

最後が、目標とする、対角化であるが、それは、実際に、与えられた行列の前と後から、対角化を行う行列の逆行列と元の行列を掛けて、行列の計算を行うだけである。

ただし、冒頭で述べたように、実際には、結果が分っているので、行列の計算を行わなくても、結果は示すことができる。

3　具体的な対角化例

3.1　具体的な問題

ユニタリ空間 $V = C^3$ 上の線型変換に対応する、次の行列 A について、対角化を試みる。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 3 & -i \\ -1 & i & 3 \end{pmatrix}$$

3.2　固有値の計算

まず、特性方程式を求める。

$$\Phi_A(x) = |A - xE|$$

なので、これを計算する。

$$\begin{aligned}
\Phi_A(x) &= |A - xE| && (1) \\
&= \left| \begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 3 & -i \\ -1 & i & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{pmatrix} \right| && (2) \\
&= \left| \begin{pmatrix} 3-x & i & -1 \\ -i & 3-x & -i \\ -1 & i & 3-x \end{pmatrix} \right| && (3) \\
&= \begin{vmatrix} 3-x & i & -1 \\ -i & 3-x & -i \\ -1 & i & 3-x \end{vmatrix} && (4) \\
&= (3-x)^3 + i \cdot (-i) \cdot (-1) + (-1) \cdot i \cdot (-i) && (5) \\
&\quad -(3-x) \cdot i \cdot (-i) - i \cdot (-i) \cdot (3-x) - (-1) \cdot (3-x) \cdot (-1) && (6) \\
&= (3-x)^3 - 3(3-x) - 2 && (7) \\
&= 27 - 27x + 9x^2 - x^3 - 9 + 3x - 2 && (8) \\
&= -x^3 + 9x^2 - 24x + 16 && (9)
\end{aligned}$$

これから、固有方程式 ($\Phi_A(x) = 0$) を作り、特性根を求める。

$$-x^3 + 9x^2 - 24x + 16 = 0$$

これは三次方程式なので、直接公式等に代入して解くのではなく、定数項 16 の約数 ($\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$) を解候補と考えて、幾つか try してみる。

幸い、 1 を代入してみると..

$$\begin{aligned}
\Phi_A(1) &= -(1)^3 + 9(1)^2 - 24(1) + 16 && (10)\\
&= -1 + 9 - 24 + 16 && (11)\\
&= 0 && (12)
\end{aligned}$$

と、0 になるので、元の式は、1 を根として持つことになる。そこで、$\Phi_A(x)$ を $x - 1$ でわり、次数をさげると、

$$\frac{\Phi_A(x)}{x-1} = x^2 - 8x + 16 \qquad (13)$$

となる。これを解くと.

$$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 = 0$$

よって、

$$x = 4(\text{重})$$

したがって、固有値は、次のようになる[20] 。

$$x = 1, 4$$

3.2.1 固有ベクトル

次に、固有ベクトルを求める、ここでは、ユニタリ行列を利用することを考える。

基本的な考え方は、固有値に対応した固有ベクトルを求め、それから、正規直交系を作ればよい。その時に、シュミットを利用することができる。

一つの固有値に対応する固有ベクトルは、一般に (少くても長さと方向で自由度があるので..)、一つには定まらない。固有ベクトル全体からなる集合はベクトル空間になっており、これを固有空間と呼ぶ。

固有ベクトル v は、式

$$Av = \alpha v$$

を満すので、これから、

$$\begin{aligned}
Av - \alpha v &= 0 && (14)\\
Av - \alpha E v &= 0 && (15)\\
(A - \alpha E)v &= 0 && (16)
\end{aligned}$$

[20] 細かいことを言えば、固有方程式の根は、多重度も含めて 3 個 (1, 4, 4) であるが固有値は、2 個 (1, 4) でよい。

ということが解る。

従って、固有値 α に対応した固有空間 W_α は、

$$W_\alpha = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | (A - \alpha E)v = 0\}$$

と表現できる。そこで、その W_α の基底で都合の良いものを選択すればよい。

固有値 1 に対応する固有ベクトル このベクトルは、固有値が重根ではなかったので、一つだけ定まる。固有空間 W_1 は、次のように定まる。

$$W_1 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | (A - 1 \cdot E)v = 0\}$$

これは、

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 3 & -i \\ -1 & i & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} 3-1 & i & -1 \\ -i & 3-1 & -i \\ -1 & i & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 2 & -i \\ -1 & i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{19}$$

より、

$$\begin{cases} 2x_1 + ix_2 - x_3 = 0 \\ -ix_1 + 2x_2 - ix_3 = 0 \\ -x_1 + ix_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

という方程式を表している。

そこで、これを解き、x_1, x_2, x_3 の満すべき式を求める[21]。ここで、二つめの式を i 倍して三番目の式をから引くと一つ目式の (-1) 倍になっていることがわかるので、意味があるのは、二つの式だけであることがわかる[22] 。

式を単純にするために、一つ目の式に三つ目の式を 2 倍して足すと、

$$\begin{aligned} 3ix_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned}$$

[21]これは、あくまでも、この固有空間 W_1 の基底 v_1 を「簡単」に求めるために行う作業である。

[22]本来、この空間の要素 v が、3 つの変数 (x_1, x_2, x_3) で表現されるので、3 次元のはずであるが、それに対して 2 つの式が与えられるので、2 つ次元が下り、結局この空間の次元は $1(= 3 - 2)$ 次元となることがわかる。

同様に、二つ目の式に三つ目の式を $2i$ 倍して足すと、

$$\begin{array}{rcrcr} -3ix_1 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & = & -ix_3 \end{array}$$

となる。これから、(媒介変数 t を考え、$x_3 = t$ として..)

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -it \\ x_2 & = & -t \\ x_3 & = & t \end{array} \right.$$

となるので、固有空間 W_1 は、

$$W_1 = \{v = \begin{pmatrix} -it \\ -t \\ t \end{pmatrix} | t \in C\}$$

と表すこともできる。このようなベクトルの内、後の計算が楽なように、$t = -1$ を選び、

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を選ぶ。この v_1 が、W_1 の基底になっている[23]。

更に、$|v_1|$ で割って、正規化する。

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} \tag{20}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

これが、W_1 の正規直交基底[24]。

固有値 4 に対応する固有ベクトル このベクトルは、固有値が (二) 重根だったので、二つの独立した固有ベクトルが取れる可能性がある[25]。もし、二つの独立した固有ベクトルが取れなければ、元の行列が対角化できないことに注意しよう[26]

固有空間 W_4 は、次のように定まる。

$$W_4 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid (A - 4 \cdot E)v = 0\}$$

[23]一次元なので、0 ベクトル以外の W_1 の要素はどれでも W_1 の基底になる。

[24]一つしかないベクトルで、直交というのは、奇妙に感じるかもしれないが、一つの要素からなる基底は、定義により常に直交基底になるということである。

[25]逆に、単重 (重根でない根) であれば、前問と同様に固有ベクトルが一つしかないので、解りやすい。

[26]もちろん、この問題の場合は、元の行列 A が、エルミート行列なので、対角化ができる (つまり、ベクトルが二つ取れる..) ことがわかっているので心配ないのだが..。

この結果、同様にして、変数 x_1, x_2, x_3 の満すべき方程式が次のように与えられる。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} -x_1 & + & ix_2 & - & x_3 & = 0 \\ -ix_1 & - & x_2 & - & ix_3 & = 0 \\ -x_1 & + & ix_2 & - & x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

この連立方程式は一つ目と三つ目が全く同じ等式であり、また、二つ目も一つ目の定数 (i) 倍になっているだけなので、結局、意味があるのはこの内の一つだけであることがわかる[27] 。

結局、固有空間 W_4 は、次のように表すことができる。

$$W_4 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - ix_2 + x_3 = 0\}$$

この中から二つ、ベクトルを選ぶことになるが、計算を楽にするために、できるだけ 0 を沢山含んだベクトルを考える。

この場合は、例えば、$x_2 = 0$ にし、更に $x_1 = 1$ とすれば、自動的に $x_3 = -1$ と決るので、これを v_2 とする。

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

同様に、$x_1 = 0, x_2 = 1$ とすれば、$x_3 = i$ となり、

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

なので、これで二つの独立したベクトルが得られたことになる[28] 。

ここで、v_2, v_3 は確かに、W_4 の基底[29] なのだが、正規直交系になっていないので、シュミットの直交化を行い直交化する[30]。

---

[27]よって、3 次元の空間で、それを制限する式が一つなので、全体の次元は 2 (= 3 - 1) 次元となり、この結果として、独立したベクトルが 2 つ取れることがわかる。

[28]本来は、本当に独立なのかを調べる必要がある。しかし、一つの要素が 0 であるベクトルは、少くても、その要素が 0 でなく、かつ、そのベクトルで 0 でない要素が 0 となっているベクトルとは独立であることが分っているので、この例のように、一方は、x_1 が 0 で x_2 が 0 でないベクトルで、他方が、x_1 が 0 でなくて、x_2 が 0 とすれば、自動的に、この二つのベクトルは独立となる。

ちなみに、このベクトルの取りかたは、かなり恣意的であることに注意しよう。どの次元の要素を 0 にするかで、異なる回答が色々考えられるし、また、同じ要素を 0 にしても、少くても、符号の取り方に任意性があるので、同じ答えになるという保証はない。

また、いずれかの要素を 0 にするというのは、計算を楽にするための工夫であり、もちろん 0 にしなければならないという理由もない。場合によっては、その方が都合がよいかもしれないということも留意する。

[29]互いに独立で、空間の次元に等しい個数のベクトルなので..。

[30]後に述べるように、「行列の対角化」を行うためには、この作業はなくても構わない。ただ、ここで、これを行っておけば、後々、作業が楽になるということである。

$$
\begin{aligned}
u_2' &= v_2 && (22)\\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (23)\\
|u_2'| &= \sqrt{(u_2', u_2')} && (24)\\
&= \sqrt{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)} && (25)\\
&= \sqrt{1 \cdot \overline{1} + 0 \cdot \overline{0} + (-1) \cdot \overline{(-1)}} && (26)\\
&= \sqrt{2} && (27)\\
u_2 &= \frac{u_2'}{|u_2'|} && (28)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (29)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v_3, u_2) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) && (30)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) && (31)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{0} + i \cdot \overline{(-1)}) && (32)\\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}} && (33)\\
u_3' &= v_3 - (v_3, u_2)u_2 && (34)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{-i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (35)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (36)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + i \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + i \cdot 0 \\ 2 \cdot i + i \cdot (-1) \end{pmatrix}\right) && (37)\\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} && (38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|u_3'| &= \sqrt{(u_3', u_3')} && (39)\\
&= \sqrt{(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix})} && (40)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix})} && (41)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(i \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{2} + i \cdot \bar{i})} && (42)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(i \cdot (-i) + 2 \cdot 2 + i \cdot (-i))} && (43)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{6} && (44)\\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} && (45)\\
u_3 &= \frac{u_3'}{|u_3'|} && (46)\\
&= \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} && (47)\\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} && (48)
\end{aligned}
$$

以上で、W_1 の正規直交系 u_1 と、W_4 の正規直交系 u_2, u_3 を求めることができた。更に、本来ならば、u_1 と u_2, u_3 の直交性を示す必要があるのだが、W_1 と W_4 が直交することが分っているので、これは考える必要がない[31]。したがって、このままこの三つが V 正規直交系であることがわかる。

したがって、正規直交化された固有ベクトルの組は以下のようになる[32]。

$$
u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{49}
$$

3.2.2 対角化を行う行列とその逆行列の計算

対角化を行う行列そのものは、単に上で求めた固有ベクトルを並べるだけである。また、逆行列は、転置、共役を取る。

[31] すなわち、u_1 は、u_2, u_3 とは直交していることが既に、分っている。

[32] より正確には、括弧の外のスカラーを、中の要素にかけるという計算もする必要があるし、次の所で、実際にその作業を行っているが、まあ、このような形のままでも、**答**としては問題ない。

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} && (50)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} && (51)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} && (52)\\
u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (53)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (54)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} && (55)\\
u_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} && (56)\\
&= \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} && (57)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6}i \end{pmatrix} && (58)
\end{aligned}
$$

なので[33]、

$$
\begin{aligned}
U &= (u_1, u_2, u_3) && (59)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}i \end{pmatrix} && (60)
\end{aligned}
$$

となる。
これから、通常の方法[34]で、U^{-1} を求めても良いが、それより簡単な方法がある。

[33]さすがに、行列の要素にする場合は、外のスカラーを中の要素にかける必要がある..。
[34]ガウスの消去法等

u_1, u_2, u_3 は、正規直交系なので、これを並べた行列 $U = (u_1, u_2, u_3)$ は、ユニタリ行列である[35]。したがって、$U^{-1} = U^*$ となる[36]。

したがって、

$$
\begin{aligned}
U^{-1} &= U^* && (61)\\
&= \overline{{}^tU} && (62)\\
&= \overline{{}^t\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}i \end{pmatrix}} && (63)\\
&= \overline{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6}i & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6}i \end{pmatrix}} && (64)\\
&= \begin{pmatrix} \overline{\frac{\sqrt{3}}{3}i} & \overline{\frac{\sqrt{3}}{3}} & \overline{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ \overline{\frac{\sqrt{2}}{2}} & \overline{0} & \overline{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \overline{\frac{\sqrt{6}}{6}i} & \overline{\frac{\sqrt{6}}{3}} & \overline{\frac{\sqrt{6}}{6}i} \end{pmatrix} && (65)\\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6}i & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6}i \end{pmatrix} && (66)
\end{aligned}
$$

したがって、回答は、

$$
U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6}i & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6}i \end{pmatrix} \qquad (67)
$$

となる。

3.2.3 対角化の実際

対角化も実際に計算するだけである。

前問より、U, U^{-1} が分っているので、計算するだけなのだが、U は A の固有ベクトルから作られているので、

$$
AU = U\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
$$

が成立する。

すなわち、

[35] これが言いたいが為に、わざわざ、シュミットの直交化を利用してまで直交基底としたわけである。逆に、直交化が行われていなければ、逆行列をまともに計算しなければならず、こちらの方の計算の量の方が、シュミットの直交化を行う計算の量より多いので、大変になってしまう。

[36] 一般に、U^{-1} を直接求めるより、U^* を求める方が簡単なので...。

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

であり、これが回答となる。