代数学幾何学演習 II (No.002)

利根川 聡

2003 年 4 月 25 日

4. 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5)$ に左から正則行列 P をかけたところ、$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ という形になった。

(1) $P\boldsymbol{a}_1, P\boldsymbol{a}_2, P(2\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5)$ を求めよ。

(2) $\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{a}_1$ を示せ。

(3) $\boldsymbol{a}_5$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の線形結合で表せ。

(4) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は線形独立であることを示せ。

(5) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ は線形独立であることを示せ。

5. 次に示すのは、行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に基本変形を施していった様子である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 以下の文が正しくなるように、$\langle$左・右$\rangle$ のいずれか一方を選び、下線部にあてはまる行列を求めよ。

(1a) 2 番目の行列は、行列 A に $\langle$左・右$\rangle$ から行列 ______ をかけると得られる。

(1b) 4 番目の行列は、行列 A に $\langle$左・右$\rangle$ から行列 ______ をかけると得られる。

(1c) 最後の行列は、その直前の行列に $\langle$左・右$\rangle$ から行列 ______ をかけると得られる。

(2) 最後の行列を F とする。$A = PFQ$ が成り立つような正則行列 P, Q を求めよ。

(3) $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$ と表すとき、$\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せることを示せ。

(4) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求めよ。

6. 次の行列の階数（ランク）を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

7. 以下の行列の行列式および逆行列を求めよ。C, D に対しては、逆行列が存在するための x の条件も言え。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

8. 次の連立方程式を解け。(3) では、連立方程式が解をもつような定数 a の値を求めた上で、解を求めよ。

$$(1) \begin{cases} x + 2y - z + 8w &= 10 \\ 2x - 3y + z - w &= -1 \\ -x + y + 4z - 5w &= -1 \\ x - 2y + 2z - 3w &= -2 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} 2x + y - z + 6w &= 4 \\ -x + 5y + 2z + w &= 10 \\ x + 2y + 3z + w &= -4 \\ 2x - y + z + 8w &= -2 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} x + 3y + z &= 3 \\ -2x + 2y + 3z &= -2 \\ ax + y - 2z &= 5 \\ -x - 2y + 2z &= -12 \end{cases}$$

9. 以下に与えるベクトルの組 $\langle \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3} \rangle$ にシュミットの直交化法を適用して、正規直交基底 $\langle \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \rangle$ を作れ。

(1) $\boldsymbol{f_1} = (1,1,1),\ \boldsymbol{f_2} = (0,1,1),\ \boldsymbol{f_3} = (0,0,1)$

(2) $\boldsymbol{f_1} = (1,-2,1),\ \boldsymbol{f_2} = (1,2,-3),\ \boldsymbol{f_3} = (2,1,1)$

(3) $\boldsymbol{f_1} = (4,1,1),\ \boldsymbol{f_2} = (1,0,-1),\ \boldsymbol{f_3} = (2,-4,5)$

(4) $\boldsymbol{f_1} = (1,i,0),\ \boldsymbol{f_2} = (0,2,i),\ \boldsymbol{f_3} = (1,-i,3)$

(5) $\boldsymbol{f_1} = (i,-1,1),\ \boldsymbol{f_2} = (2+i,-i,2+i),\ \boldsymbol{f_3} = (3,1-i,2)$

(6) $\boldsymbol{f_1} = (1,1-i,i),\ \boldsymbol{f_2} = (-1+2i,1,-1),\ \boldsymbol{f_3} = (i,1-2i,1)$

10. $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,1),\ \boldsymbol{a}_2 = (0,2,2),\ \boldsymbol{a}_3 = (3,7,1)$ とおく。

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立であることを示せ。

(2) $\boldsymbol{b} = (-1,3,-7)$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合で表せ。

(3) $\boldsymbol{c} = (-6,c,3)$ とおくとき、$\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{c}$ が線形従属となるように c の値を定めよ。

11. A, B を実数を成分とする n 次正方行列とする。

(1) A, B がともに逆行列をもつとき、積 AB も逆行列をもつことを示せ。

(2) A および積 AB が逆行列をもつとき、B も逆行列をもつか？証明または反例を与えよ。

12. A, B を実数を成分とする n 次正方行列とし、A は直交行列であるとする。

(1) B が直交行列ならば、積 AB, BA も直交行列となることを示せ。

(2) 積 AB が直交行列ならば、B および BA も直交行列となることを示せ。

13. A, B を実数を成分とする n 次正方行列とする。

注：任意の A, B に対して ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことは、証明なしに用いてよい。

(1) A が正則行列ならば ${}^tA$ も正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が成り立つことを示せ。

(2) A が正則な対称行列ならば A^{-1} も対称行列となることを示せ。

(3) A, B が対称行列ならば積 AB も対称行列となるか？証明または反例を与えよ。

14. 行列 A を $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$（ただし、$A_{11}, A_{22}$ は正方行列とする）と区分けするとき、以下の問に答えよ。

(1) A が正則であるためには A_{11}, A_{22} がともに正則であることが必要であることを示せ。

(2) A_{11}, A_{22} がともに正則ならば A も正則であることを示し、A^{-1} を A_{11}, A_{12}, A_{22}（および、必要ならばその逆行列）を用いて表せ。