**代数学幾何学演習 II No.3 2003 年 5 月 23 日**

**15.** 次の写像 $f_1 \sim f_8$ について、以下の問に答えよ。黒板で解くときは、一つの写像に対し (1)〜(4) 全てに答えよ。

$f_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \quad f_1(x) = x+1$

$f_2 : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, \quad f_2(x) = x+1$

$f_3 : [0,\infty) \to [0,\infty), \quad f_3(x) = x^2$

$f_4 : \mathbf{R} \to [0,\infty), \quad f_4(x) = x^2$

$f_5 : [0,\infty) \to \mathbf{R}, \quad f_5(x) = x^2$

$f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_6(x) = x^2$

$f_7 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad f_7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$

$f_8 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad f_8\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ -6x+3y \end{pmatrix}$

(1) 写像の値域を求めよ。

(2) 写像が全射であるかどうか調べよ。

(3) 写像が単射であるかどうか調べよ。

(4) 逆写像が存在するかどうかを述べ、存在する場合はそれを求めよ。

**16.** 以下の各命題に対して、反例を与えよ。ここで、$A, B, X$ は実数を成分とする $n(\geq 2)$ 次正方行列とする。

(1) 任意の $A, B$ に対して $AB = BA$ が成り立つ。

(2) $AB = O$ ならば $A = O$ または $B = O$ が成り立つ。

(3) $A^2 + B^2 = O$ ならば $A = B = O$ である。

(4) $A^2 = E$ ならば $A = E$ または $A = -E$ である。

(5) ある自然数 $k \geq 2$ に対して $A^k = O$ ならば $A = O$ である。

(6) $A \neq O$ ならば $AX = B$ を満たす $X$ がただ一つ存在する。

**17.** 以下の連立方程式を解け。(1) は $a$ の値によって場合分けせよ。

(1) $\begin{cases} 3x+2y+z &= 7 \\ 2x+3y+4z &= 8 \\ 4x+2y+az &= 8 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+y-3z+4w &= 7 \\ 3x-2y+5z-w &= -6 \\ 8x-3y+7z+2w &= -5 \\ 5x-y+2z+3w &= 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -5x+2y+4z+5u-8v &= 1 \\ 8x-3y-6z-6u+12v &= -1 \\ 6x-2y-5z-3u+7v &= -1 \\ -2x+y+3z+5u-3v &= 2 \end{cases}$

**18.** 連立方程式 $\begin{cases} 2x-y-3z &= b \\ -3x-2y+z &= -3 \\ 4x+5y+az &= 5 \end{cases}$ の解が以下のようになるために $a, b$ が満たすべき条件を求めよ。

(1) ただ一つ存在する。

(2) 複数存在する。

(3) 存在しない。

**19.** $a, b, c$ が相異なる三数であるとき、連立方程式 $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ ax+by+cz &= d \\ a^2x+b^2y+c^2z &= d^2 \end{cases}$ を解け。

**20.** (複素数体上の) 連立一次方程式の解は、(a) 全く存在しない (b) ただ一つ存在する (c) 無限個存在する、のいずれかであることを示せ。

※従って、ちょうど 2 個 (または 3 個、4 個など) の解が存在するということは起こらない。