

21.

(1) 以下の連立方程式を解け。

$$(a) \begin{cases} 3x + y + 5z + 4w = 3 \\ 7x + 2y + 4z + w = -1 \\ 2x + 2y + 3z + 5w = 3 \\ -2x + y + 2z + 6w = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 5x - 3y + z - u + 5v = -5 \\ 3x - 2y + 2z + u + 5v = 0 \\ 2x - y - 2z - 3u - v = -7 \\ -7x + 4y + 2z + 5u - 3v = 14 \end{cases}$$

(2) シュミットの直交化法により、以下の $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ から正規直交基底 $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ を作れ。

$$f_1 = (5, -2, 1), \quad f_2 = (2, -1, 0), \quad f_3 = (3, 1, 1)$$

22. 実係数 (m, n) 型行列 A と $b \in \mathbb{R}^m$ を用いて \mathbb{R}^n の部分集合 X を $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ で定義する。

- (1) X が空集合にならないために A, b が満たすべき条件を言え。
- (2) X が線形空間 \mathbb{R}^n の部分空間になるために A, b が満たすべき条件を言え。

23. (1) \mathbb{C} は、複素線形空間としては1次元で、実線形空間としては2次元である。このことを説明せよ。

- (2) \mathbb{C}^n を複素線形空間とみるとき、次元はいくつか? (基底の一例も与えよ)
- (3) \mathbb{C}^n を実線形空間とみるとき、次元はいくつか? (基底の一例も与えよ)

注: 複素線形空間 = \mathbb{C} 上の線形空間、実線形空間 = \mathbb{R} 上の線形空間

24. $a_1 = (1, -1, 2, 1), a_2 = (1, 0, 1, 2), a_3 = (1, -3, 4, -1), b_1 = (1, 1, 0, 3), b_2 = (0, 1, 1, 1), b_3 = (2, 1, 3, 5)$ に対し、 a_1, a_2, a_3 によって生成される \mathbb{R}^4 の部分空間を W_a, b_1, b_2, b_3 によって生成される \mathbb{R}^4 の部分空間を W_b とする。このとき、 $W_a + W_b$ および $W_a \cap W_b$ の次元と1つの基底を求めよ。

25. x の多項式 $f_k (k = 0, 1, 2, 3, 4)$ を次で定義する。

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x(x-1), f_3(x) = x(x-1)(x-2), f_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

- (1) $\langle f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ が $P_4(\mathbb{R})$ (4次以下の多項式全体から成る線形空間) の基底になることを示せ。
- (2) 単項式 $1, x, x^2, x^3, x^4$ をこの基底を用いて表せ。

26. 以下の連立方程式を解け。(4),(5),(6) は a の値によって場合分けせよ。

$$(1) \begin{cases} 3x + y + 5z + 4w = 3 \\ 7x + 2y + 4z + w = -1 \\ 2x + 2y + 3z + 5w = 3 \\ 2x - y - 2z - 6w = -5 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x - 3y + z - w = 5 \\ 3x - 2y + 2z + w = 5 \\ 2x - y - 2z - 3w = -1 \\ -7x + 4y + 2z + 5w = -3 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 3x + 5y + 7z + 4w = 11 \\ 2x + 3y + 4z + 3w = 7 \\ 4x + 3y + 2z + 9w = 11 \\ 5x + 4y + 3z + 11w = 14 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} -2x + 5y + z = -1 \\ 3x - 4y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = a \end{cases} \quad (5) \begin{cases} 5x + 2y + 6z = 9 \\ 4x + 2y + 5z = 7 \\ 2x + ay + az = 2a - 6 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 3x + 3y + z + (4+a)w = 2a + 7 \\ 4x + y + z - w = a + 9 \\ x - 2y + z - 4w = -2a + 3 \\ 3x - 2y + z - 6w = -2a + 7 \end{cases}$$