代数学幾何学演習 II (No.005)

利根川 聡

2003 年 7 月 4 日

27. 以下の問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が線形独立ならば、$1 \leq k \leq n$ を満たす任意の自然数 k に対し $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ も線形独立であることを示せ。また、この命題の対偶を書け。

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が線形独立ならば、これらのどのベクトル $\boldsymbol{x}_k$ もそれを除いた $(n-1)$ 個のベクトルの線形結合では表せないことを示せ。

(3) n 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ に対し、これらのどのベクトル $\boldsymbol{x}_k$ もそれを除いた $(n-1)$ 個のベクトルの線形結合で表せないなら、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は線形独立であることを示せ。

(4) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が線形独立で $\boldsymbol{x}_{n+1}$ が $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ の線形結合で表せないならば、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+1}$ は線形独立であることを示せ。

28. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in V$ がベクトル空間 V の基底であることを定義を述べよ。さらに、次の 3 つの命題が同値であることを示せ。

(a) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in V$ は V の基底である。

(b) V の任意の元は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in V$ の線形結合としてただ一通りの形で表される。

(c) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in V$ は線形独立、かつ、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{v}$ は線形従属である。

29. $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3,4), \boldsymbol{a}_2 = (2,-1,0,3), \boldsymbol{a}_3 = (-4,7,6,-1)$ によって生成される $\mathbf{R}^4$ の部分空間を W とする。

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうちからいくつかを選んで W の基底を作れ。また W の次元を言え。

(2) (1) で得た W の基底にいくつかのベクトルを追加して $\mathbf{R}^4$ の基底を作れ。

30. $P_3(\mathbf{R})$ 高々 3 次の実係数多項式全体から成る線形空間）の部分集合 W_0, W_1, W_2, W_3 を以下で定義する。

$$W_0 = \left\{ f \in P_3(\mathbf{R}) \;\middle|\; f(0) = 0 \right\}, \quad W_1 = \left\{ f \in P_3(\mathbf{R}) \;\middle|\; f(-1) = f(0) = f(1) \right\},$$

$$W_2 = \left\{ f \in P_3(\mathbf{R}) \;\middle|\; f(x) + f(-x) = 0 \right\}, \quad W_3 = \left\{ f \in P_3(\mathbf{R}) \;\middle|\; \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \right\}$$

(1) W_0, W_1, W_2, W_3 が $P_3(\mathbf{R})$ の部分空間であることを示し、さらにそれらの次元と 1 つの基底を求めよ。

(2) $i, j = 0,1,2,3,\ i \neq j$ に対し $W_i + W_j$ および $W_i \cap W_j$ の次元と 1 つの基底を求めよ。また、$\dim W_i + \dim W_j = \dim(W_i + W_j) + \dim(W_i \cap W_j)$ が成り立つことを確かめよ。

31. ベクトル空間 V の基底の取り替え $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ の行列を求めよ。

(1) $V =$ 3 次元ベクトル空間, $\mathrm{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$, $\mathrm{F} = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \rangle$, $\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{f}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3 \end{cases}$

(2) $V = \mathbf{R}^2,\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$

(3) $V = \{{}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 4x + 7y + z = 0\},\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(4) $V = \mathbf{R}^3,\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$