代数学幾何学演習 II (No.006)

利根川 聡

2003 年 10 月 3 日

32. $\mathbf{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を以下で定義するとき、$W_1 + W_2$ および $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ。

(1) $W_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$

(2) $W_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \right\}$

(3) $W_1 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$

ただし $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, -1, 1), \boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 0, 1), \boldsymbol{a}_3 = (1, 3, 0, 4), \boldsymbol{b}_1 = (1, 2, 1, 1), \boldsymbol{b}_2 = (0, 3, 2, 3), \boldsymbol{b}_3 = (-3, 0, 1, 3)$

33. 以下の問に答えよ。

(1) $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ を V の 1 つの基底とし、スカラー a, b, c, d を用いて $\boldsymbol{f}_1 = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_2 = c\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2$ とおく。このとき、$\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle$ が V の基底となるために a, b, c, d が満たすべき条件を求めよ。

(2) $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を V の 1 つの基底とし、スカラー a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を用いて $\boldsymbol{f}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_i$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ とおく。このとき、以下の 2 つの命題が同値であることを示せ。

(a) $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n \rangle$ は V の基底である。

(b) $A = (a_{ij})$ とおくとき、行列 A は正則である。

34. ベクトル空間 V の基底の取り替え $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ の行列を求めよ。

(1) $V = \mathbf{R}^2,\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $V = \{ {}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \},\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 14 \\ -17 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 \\ 24 \\ -29 \end{pmatrix} \right\rangle$

(3) $V = \mathbf{R}^3,\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$

(4) $V = P_3(\mathbf{R}),\ \mathrm{E} = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle,\ \mathrm{F} = \langle 1, 1 + x, (1 + x)^2, (1 + x)^3 \rangle$

基底の取り替え行列について

$\boldsymbol{e}_1 = {}^t(-1,3), \boldsymbol{e}_2 = {}^t(1,-2), \boldsymbol{f}_1 = {}^t(2,1), \boldsymbol{f}_2 = {}^t(1,1)$ とおく。ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(a,b) \in \mathbf{R}^2$ を2つの異なる基底 $\mathrm{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle, \mathrm{F} = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle$ を用いて表すことを考える。まず $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ が成り立つように x_1, x_2 を求めると（連立方程式 $-x_1 + x_2 = a,\ 3x_1 - 2x_2 = b$ を解く）$x_1 = 2a+b,\ x_2 = 3a+b$ であるから、$\boldsymbol{v}$ を基底 E で表したときの座標は $\boldsymbol{x} = {}^t(2a+b, 3a+b)$ である。一方、$\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2$ を満たす y_1, y_2 は $y_1 = a-b,\ y_2 = -a+2b$ であるから、$\boldsymbol{v}$ を基底 F で表したときの座標は $\boldsymbol{y} = {}^t(a-b, -a+2b)$ である。ここで $\boldsymbol{x}$ は、ある行列 P と $\boldsymbol{y}$ を用いて $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ と書ける（P をどうおけばよいか、実際に求めてみよ）。この P が基底の取り替え $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ の行列である。

35.

(1) ベクトル空間 V の基底の取り替え $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ の行列を求めよ。

(a) $V = \mathbf{R}^2,\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x+3y-2z=0 \right\},\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $\mathbf{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を以下で定義する、このとき、$W_1, W_2, W_1+W_2, W_1 \cap W_2$ の次元と基底の一例を求めよ。

$$W_1 = \left\{ {}^t(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{r} -2x+y+z+w=0 \\ 5x-2y-4z-3w=0 \end{array} \right\},\quad W_2 = \left\{ {}^t(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{r} 4x-3y+z+2w=0 \\ -4x+y+5z+2w=0 \end{array} \right\}$$

36.

V, W_1, W_2 を以下で定義するとき、$V = W_1 + W_2$ が成り立つかどうかを調べよ。また、$V = W_1 + W_2$ が成立するものに対しては $V = W_1 \oplus W_2$ が成立するかどうかも調べよ。

(1) $V = \mathbf{R}^3,\ W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,\ W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $V = \mathbf{R}^3,\ W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(3) $V = \mathbf{R}^3,\ W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, 3x-4y+2z=0 \right\},\ W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ 3x-5y+z=0 \end{array} \right\}$

(4) $V = \mathbf{R}^4,\ W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle,\ W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(5) $V=\mathbf{R}^4,\ W_1=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x+2y-z+3w=0 \\ 3x+y+2z-w=0 \end{array}\right\},\ W_2=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} 3x-2y+3z+w=0 \\ 4x-2y+2z+w=0 \\ x-2y+5z+w=0 \end{array}\right\}$

(6) $V=\mathrm{M}_n(\mathbf{R}),\ W_1=\{$上三角行列$\in V\},\ W_2=\{$下三角行列$\in V\}$

(7) $V=\mathrm{M}_n(\mathbf{R}),\ W_1=\{A\in V \mid {}^tA=A\},\ W_2=\{A\in V \mid {}^tA=-A\}$

(8) $V=\mathrm{M}_n(\mathbf{R}),\ W_1=\{$上三角行列$\in V\},\ W_2=\{A\in V \mid {}^tA=-A\}$

(9) $V=P_4(\mathbf{R}),\ W_1=\{f\in V \mid f(0)=0\},\ W_2=\{f\in V \mid f'(x)\equiv 0\}$

(10) $V=P_4(\mathbf{R}),\ W_1=\left\{f\in V \;\middle|\; \int_0^1 f(x)dx=0\right\},\ W_2=\left\{f\in V \;\middle|\; \int_{-1}^0 f(x)dx=0\right\}$

37. 3次元ベクトル空間 V の異なる2次元部分空間 W_1, W_2 の和 W_1+W_2 は V に一致することを示せ。

38. 4次元ベクトル空間 V の2次元部分空間 W_1, W_2 に対して、$V=W_1+W_2$ ならば $V=W_1\oplus W_2$ が成り立つことを示せ。