代数学幾何学演習 II (No.007)

利根川 聡

2003 年 10 月 17 日

39. V を２次元のベクトル空間、$\mathrm{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$, $\mathrm{F} = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle$ を V の２つの基底、S, T を V 上の線形変換とする。２つの基底 E, F の間には以下の (a) の関係があり、線形変換 S, T に対しては以下の (b),(c) が成り立つとする。

$$\text{(a)} \begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{f}_2 = 5\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} S\boldsymbol{e}_1 = -10\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 \\ S\boldsymbol{e}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} T\boldsymbol{e}_1 = 4\boldsymbol{e}_1 + 9\boldsymbol{e}_2 \\ T\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

(1) 基底 E に関する S, T の行列をそれぞれ求めよ。

(2) 基底 E に関する ST の行列を求めよ。

(3) 基底 F に関する S の行列を求めよ。

(4) 基底 F に関する T の行列を求めよ。

(5) 基底 F に関する ST の行列を求めよ。

注：ST は $(ST)\boldsymbol{x} = S(T\boldsymbol{x})$ で定義される合成変換を表す。

40. ベクトル空間 V とその２つの基底 E, F が以下のように与えられており、V 上の線形変換 T の基底 E に関する行列が A であるとする。このとき、T の基底 F に関する行列を求めよ。

(1) $V = \mathbf{R}^2,\ \mathrm{E} =$ 標準基底, $\mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $V = \mathbf{R}^2,\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $V = \mathbf{R}^3,\ \mathrm{E} =$ 標準基底, $\mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \right\rangle,\ A = \begin{pmatrix} 23 & 3 & 21 \\ 8 & 3 & 8 \\ -24 & -3 & -22 \end{pmatrix}$

41. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおき、$\mathbf{R}^3$ 上の線形変換 T を $T\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3)$ で定義する。また、$\mathbf{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 を以下で定義する。

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{array} \right\}$$

(1) $\dim W_1 = 2,\ \dim W_2 = 1$ が成り立つことを示し、W_1 の基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ および W_2 の基底 $\langle \boldsymbol{e}_3 \rangle$ を求めよ。

(2) W_1, W_2 が T-不変部分空間であることを示せ。

(3) $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ が $\mathbf{R}^3$ の基底であることを示し、この基底に関する T の行列を求めよ。

42. $P_3(\mathbf{R})$ 上の線形変換 T を $Tf = \dfrac{df}{dx}$ で定義する。

(1) $\mathrm{Im}T, \mathrm{Ker}T$ を求めよ。

(2) 基底 $\left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$ に関する T の行列を求めよ。

(3) (2) で求めた行列を A として A^k $(k = 1, 2, \cdots)$ を計算せよ。

43. $P_3(\mathbf{R})$ 上の線形変換 T を $(Tf)(x) = f(x+1)$ で定義する。また、$P_3(\mathbf{R})$ の 2 つの基底を $\mathrm{E} = \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$, $\mathrm{F} = \left\langle 6, 6+6x, 1+3x+3x^2, x^3 \right\rangle$ で定義する。

(1) 基底の取り替え $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ の行列を求めよ。(これを P とする)

(2) 線形変換 T の基底 E に関する行列を求めよ。(これを A とする)

(3) $P^{-1}AP$ を計算せよ。また、これが線形変換 T の基底 F に関する行列となることを確かめよ。

44. $P_3(\mathbf{R})$ 上の線形変換 T を以下のように定義するとき、T の基底 $\mathrm{E} = \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$ に関する行列、および基底 F に関する行列を求めよ。

(1) $(Tf)(x) = f'(x) + f(x), \quad \mathrm{F} = \left\langle 6, 6x, 3x^2, x^3 \right\rangle$

(2) $(Tf)(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)dt, \quad \mathrm{F} = \left\langle 1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3 \right\rangle$

(3) $(Tf)(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x-t)^3 f(t)dt, \quad \mathrm{F} = \left\langle 1, x^2, x, x^3 \right\rangle$

45. V を 3 次交代行列全体からなるベクトル空間とする。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ とし $T(X) = AX - XA$ $(X \in V)$ とおくと、T は V 上の線形変換となることを示せ。

(2) $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、$\langle E_1, E_2, E_3 \rangle$ は V の基底となる。線形変換 T のこの基底に関する行列を求めよ。

46. 以下に与えるベクトルの組 $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \rangle$ にシュミットの直交化法を適用して、正規直交基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ を作れ。

(1) $\boldsymbol{f}_1 = (1+i, 1-i, 0),\ \boldsymbol{f}_2 = (1+2i, 2+i, 4i),\ \boldsymbol{f}_3 = (-1+i, 3+3i, -5+4i)$

(2) $\boldsymbol{f}_1 = (2, 3i, 1-2i),\ \boldsymbol{f}_2 = (1+i, 3+9i, -3-5i),\ \boldsymbol{f}_3 = (8-2i, 3, 2-9i)$

(3) $\boldsymbol{f}_1 = (1+2i, 3-i, 1),\ \boldsymbol{f}_2 = (3, -1-i, -1-6i),\ \boldsymbol{f}_3 = (i, -2+2i, -2-5i)$

(4) $\boldsymbol{f}_1 = (3, 1+i, 1-2i),\ \boldsymbol{f}_2 = (4-i, -1+i, 6+5i)\ \boldsymbol{f}_3 = (10, 3, 9+i)$

(5) $\boldsymbol{f}_1 = (2-i, 2+i, -1+3i),\ \boldsymbol{f}_2 = (2i, 5, 1+i)\ \boldsymbol{f}_3 = (7+6i, -3-14i, 7-2i)$

47. $f, g \in P_3(\mathbf{R})$ の内積 (f, g) を以下で与えるとき、$\left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$ にシュミットの直交化法を適用して得られる正規

直交基底を求めよ。

(1) $(f,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ (2) $(f,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $(f,g)=\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$ (4) $(f,g)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx$

48. $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ は2つの条件 (1) $\boldsymbol{e}_k\neq\boldsymbol{o}$ $(1\le k\le n)$ (2) $i\neq j$ ならば $(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=0$ を満たしているとする。このとき、$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ は線形独立であることを示せ。

49. V を実計量線形空間とし、$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ とする。このとき、以下の (1)〜(4) が成立することを示せ。さらに、V が複素計量線形空間である場合にも同じことが言えるかどうか考察せよ。

(1) $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\le||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||$

(2) $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2=2(||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2)$

(3) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0 \Leftrightarrow ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2=||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2$

(4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{1}{4}(||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2)$

50. V を n 次元ユニタリ空間、$\mathrm{E}=\langle\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\rangle$ を V の正規直交基底、$\mathrm{F}=\langle\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n\rangle$ を V の基底とする。基底の取り替え $\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ の行列を $P=(p_{ij})\in\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ とするとき、以下の (1),(2) を示せ。

(1) $(\boldsymbol{f}_i,\boldsymbol{f}_j)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_{ki}\overline{p_{kj}}$

(2) F は正規直交基底 $\Leftrightarrow$ P はユニタリ行列

51. T をベクトル空間 V 上の線形変換、W を V の部分空間とする。

(1) W が T-不変部分空間であることの定義を書け。

(2) $\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r\rangle$ を W の基底とする。このとき、次の (a),(b) が同値であることを示せ。

(a) W は T-不変部分空間である (b) $k=1,2,\cdots,r$ に対して $T\boldsymbol{e}_k\in W$ が成り立つ

52. 以下に与える n,A,W_1,W_2 の各組 (a)〜(e) に対して、(1)〜(4) に答えよ。なお、T は $T\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n)$ で定義される $\mathbf{R}^n$ 上の線形変換とする。

(1) $r=\dim W_1,\ s=\dim W_2$ および W_1 の基底 $\langle\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r\rangle$ と W_2 の基底 $\langle\boldsymbol{e}'_1,\cdots,\boldsymbol{e}'_s\rangle$ を求めよ。

(2) $\mathbf{R}^n=W_1\oplus W_2$ が成り立つことを示せ。

(3) W_1,W_2 が T-不変部分空間であることを示せ。

(4) $\mathrm{E}=\langle\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}'_1,\cdots,\boldsymbol{e}'_s\rangle$ は、(2) より $\mathbf{R}^n$ の基底である。線形変換 T の基底 E に関する行列を求めよ。

(a) $n=3,\quad A=\begin{pmatrix}3&6&-2\\-4&-7&-3\\2&2&5\end{pmatrix}$,

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3\ \middle|\ \begin{array}{c}2x+2y-3z=0\\5x+5y+7z=0\end{array}\right\},\quad W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3\ \middle|\ x+2y+z=0\right\}$$

(b) $n=3,\quad A=\begin{pmatrix}4 & -6 & 4\\ -1 & 7 & -3\\ -4 & 14 & -7\end{pmatrix}$,

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3\;\middle|\;\begin{array}{r}3x+5y-z=0\\5x+y+2z=0\end{array}\right\},\quad W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3\;\middle|\;3x-2y+2z=0\right\}$$

(c) $n=3,\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ 2 & 5 & -4\\ 2 & 6 & -5\end{pmatrix}$,

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3\;\middle|\;\begin{array}{r}x-3y+z=0\\5x-y-2z=0\end{array}\right\},\quad W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3\;\middle|\;y-z=0\right\}$$

(d) $n=4,\quad A=\begin{pmatrix}-6 & -5 & -5 & -2\\ 3 & 3 & 2 & 0\\ 8 & 6 & 7 & 3\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4\;\middle|\;\begin{array}{r}4x+y+z-2w=0\\2x+3y+z+2w=0\\-x+2y+5z+8w=0\end{array}\right\},\quad W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4\;\middle|\;4x+3y+3z+w=0\right\}$$

(e) $n=4,\quad A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -4 & 2\\ -2 & -2 & 6 & -2\\ -1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$,

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4\;\middle|\;\begin{array}{r}3x+2y-z-w=0\\3x+y+z-2w=0\\5x+y+3z-4w=0\end{array}\right\},\quad W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4\;\middle|\;\begin{array}{r}2x-y+2z-6w=0\\2x+3y-6z+2w=0\end{array}\right\}$$

53. V を内積をもつベクトル空間、W を V の部分空間、$\langle \boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r\rangle$ を W の正規直交基底とする。また、$\langle \boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r\rangle$ を拡大して V の正規直交基底 $\langle \boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\rangle$ を得たとする。

(1) $V^\perp=\{\boldsymbol{o}\},\ \{\boldsymbol{o}\}^\perp=V$ を示せ。

(2) $\boldsymbol{v}\in V$ に対して $\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{r}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k$ とおくと、$\boldsymbol{x}\in W,\ \boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}\in W^\perp$ が成り立つことを示せ。

(3) $V=W\oplus W^\perp$ を示せ。

(4) $W^\perp=\langle \boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\rangle$ が成り立つことを示せ。

(5) $(W^\perp)^\perp=W$ が成り立つことを示せ。

54. 以下は $(W_1+W_2)^\perp=W_1^\perp\cap W_2^\perp$ の証明の過程を書いたものである。ここで、$\Longleftrightarrow$ はその両側にある 2 つの命

題が同値であることを表しているが、以下の証明には、なぜ同値なのかの説明がない。そこで、$\Longleftrightarrow$ の各部分について、同値であることの理由を説明せよ。

例 (0)：直交補空間の定義に従って式を書き直した

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \in (W_1 + W_2)^{\perp} &\overset{(0)}{\Longleftrightarrow} \forall \boldsymbol{y} \in W_1 + W_2 \text{ に対して } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \\
&\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \forall \boldsymbol{y}_1 \in W_1, \forall \boldsymbol{y}_2 \in W_2 \text{ に対して } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = 0 \\
&\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \forall \boldsymbol{y}_1 \in W_1 \text{ に対して } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) = 0 \text{ かつ } \forall \boldsymbol{y}_2 \in W_2 \text{ に対して } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) = 0 \\
&\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} \in W_1^{\perp} \text{ かつ } \boldsymbol{x} \in W_2^{\perp} \\
&\overset{(4)}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} \in W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}
\end{aligned}
$$

55. $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{C}^n$ に対し、これらの内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ で定義する。

(1) $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ が成立することを示せ。

(2) $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ に関する次の 2 条件が同値であることを示せ。

(a) A はエルミート行列

(b) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ が成り立つ

(3) $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ に関する次の 3 条件が同値であることを示せ。

(a) A はユニタリ行列

(b) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つ

(c) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ に対して $||A\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$ が成り立つ

56. 以下に与える $\mathbf{R}^n$ の部分空間 W に対して直交補空間 $W^{\perp}$ の正規直交基底の一例を求めよ。

(1) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ (2) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (3) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(4) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + z = 0 \right\}$ (5) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 7z = 0 \end{matrix} \right\}$

(6) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (7) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ (8) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$