代数学幾何学演習II (No.008)

利根川 聡

2003 年 10 月 24 日

57. T を V 上の線形変換とする。

(A) $\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ を $\mathrm{Ker}T$ の基底とし、それを拡大して V の基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を得たとして、(1),(2) を証明せよ。

(1) $\langle T\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, T\boldsymbol{e}_n \rangle$ は $\mathrm{Im}T$ の基底である。

(2) $T^2 = T$ ならば $\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, T\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, T\boldsymbol{e}_n \rangle$ は V の基底である。

(B) $T^2 = T$ として、(3),(4) を証明せよ。

(3) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}T$

(4) $V = \mathrm{Im}T + \mathrm{Ker}T$ [ヒント: $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x})$]

(5) 等式 $\dim V = \dim(\mathrm{Im}T + \mathrm{Ker}T) + \dim(\mathrm{Im}T \cap \mathrm{Ker}T)$ を証明せよ。

(6) $T^2 = T \ \Rightarrow\ \mathrm{Im}T \cap \mathrm{Ker}T = \{\boldsymbol{o}\}$ を証明せよ。

(7) (1)〜(6) を適当に利用して、$T^2 = T \ \Rightarrow\ V = \mathrm{Im}T \oplus \mathrm{Ker}T$ を証明せよ。

注： (1),(5) では $T^2 = T$ を仮定しない。

58. V を n 次元ベクトル空間、$\mathrm{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を V の正規直交基底とする。また、T を V 上の線形変換で $T\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_{k+1}\ (1 \leq k \leq n-1),\ T\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_1$ を満たすものとする。

(1) T の基底 E に関する行列を求めよ。

(2) (1) で求めた行列を A とするとき、$A^k \neq E\ (k = 1, 2, \cdots, n-1)$ および $A^n = E$ が成り立つことを示せ。

(3) $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$ とおき、$\boldsymbol{f}_1$ によって張られる V の 1 次元部分空間を W_1 とすると、W_1 は T-不変部分空間となることを示せ。

(4) n を偶数とする。このとき、$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 + \cdots + \boldsymbol{e}_{n-1},\ \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$ とおき、$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ によって張られる V の 2 次元部分空間を W_2 とすると、W_2 は T-不変部分空間となることを示せ。

(5) $n = 3$ とし、$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3),\ \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2),\ \boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3)$ とおく。このとき、$\mathrm{F} = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \rangle$ が正規直交基底となることを示せ。さらに、T の基底 F に関する行列を求めよ。

(6) $n = 4$ とし、$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3),\ \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4),\ \boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3),\ \boldsymbol{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4)$ とおく。このとき、$\mathrm{F} = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4 \rangle$ が正規直交基底となることを示せ。さらに、T の基底 F に関する行列を求めよ。

59. (1) $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ とおく。このとき、次の 2 条件 (i),(ii) をともに満たすベクトル $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を 1 組求めよ。

(i) $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底　　(ii) $\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$

(2) $\mathbf{R}^3$ における以下の線形変換の標準基底に関する行列を求めよ。（ヒント：まず基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ に関する行列を求め、その後で標準基底に関する行列を求めるとよい）

(a) 平面 $x+y+z=0$ に関する対称移動

(b) 直線 $x=y=z$ の周りの角度 θ の回転移動

60. 以下に与えるベクトルの組 $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \rangle$ にシュミットの直交化法を適用して、正規直交基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ を作れ。

(1) $\boldsymbol{f}_1 = (1,2,-1),\ \boldsymbol{f}_2 = (3,4,-1),\ \boldsymbol{f}_3 = (-2,-3,5)$

(2) $\boldsymbol{f}_1 = (1+2i, 3-i, 1),\ \boldsymbol{f}_2 = (3,-1-i,-1-6i),\ \boldsymbol{f}_3 = (i,-2+2i,-2-5i)$

61. $f,g \in P_3(\mathbf{R})$ の内積を $(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ で与えるとき、$\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ にシュミットの直交化法を適用して得られる正規直交基底を求めよ。

62. ベクトル空間 V の基底の取り替え $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ の行列を求めよ。

(1) $V = \mathbf{R}^2,\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $V = \{ {}^t(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x-2y-4z=0 \},\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

63. ベクトル空間 V とその 2 つの基底 E, F が以下のように与えられており、V 上の線形変換 T の基底 E に関する行列が A であるとする。このとき、T の基底 F に関する行列を求めよ。

(1) $V = \mathbf{R}^2,\ \mathrm{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle,\ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $V = \mathbf{R}^3,\ \mathrm{E} = $ 標準基底$,\ \mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

64. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ を用いて $\mathbf{R}^4$ 上の線形変換 T を $T\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^4)$ で定義する。また、$\mathbf{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を以下で与える。このとき、(1)〜(4) に答えよ。

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 3x+2y-z-w=0 \\ 3x+y+z-2w=0 \\ 5x+y+3z-4w=0 \end{matrix} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x-y+2z-6w=0 \\ 2x+3y-6z+2w=0 \end{matrix} \right\}$$

(1) $r = \dim W_1,\ s = \dim W_2$ および W_1 の基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ と W_2 の基底 $\langle \boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_s \rangle$ を求めよ。

(2) $\mathbf{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ が成り立つことを示せ。

(3) W_1, W_2 が T-不変部分空間であることを示せ。

(4) $\mathrm{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_s \rangle$ は、(2) より $\mathbf{R}^4$ の基底である。線形変換 T の基底 E に関する行列を求めよ。**65.** 次の各行列に対して、以下の問に答えよ。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{10} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ -3 & -7 & -7 \\ 5 & 14 & 13 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 4 \\ 28 & -1 & 8 \\ -42 & 6 & -9 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_7 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -9 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B_8 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_9 = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ -2 & 9 & 2 \\ 5 & -20 & -4 \end{pmatrix}, \quad B_{10} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 14 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} -11 & -1 & 12 \\ -1 & 3 & 2 \\ -6 & -1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{14} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 8 & 3 & -10 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 & 8 \\ -9 & 11 & -2 & 8 \\ 2 & -14 & 7 & -14 \\ 8 & -14 & 4 & -11 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -7 & -7 & 2 & 9 \\ 16 & 15 & -3 & -16 \\ -24 & -22 & 4 & 24 \\ 12 & 11 & -1 & -10 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -3 & 10 & 16 & -13 \\ -1 & 15 & 15 & -10 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 特性多項式を求めよ。

(2) 固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) 適当な正則行列 P によって対角化できるかどうか判定せよ。対角化できるものには、P および対角行列を与えよ。

66. T を4次元ベクトル空間 V 上の線形変換とし、$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \rangle$ を V の基底とする。T のこの基底に関する行列が

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

であるとして、以下の問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ によって張られる部分空間 W_1 は T 不変部分空間であることを示せ。

(2) 2次元の T 不変部分空間で W_1 とは異なるものを1つ求めよ。（表現行列の形からすぐにわかる）

(3) 1次元の T 不変部分空間を求めよ。（少し工夫が必要）