代数学幾何学演習 II (No.009)

利根川 聡

2003 年 11 月 7 日

67. 次の各行列に対して、以下の問に答えよ。

$$A_1=\begin{pmatrix}-3&2&-3\\1&3&2\\-2&0&-1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}3&-2&3\\-2&-3&-3\\2&1&1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}6&2&1\\-8&-2&-2\\4&2&3\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-1&-3&1\\2&-3&1\end{pmatrix},$$

$$A_5=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\-2&2&-1\end{pmatrix},\quad A_6=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix},\quad A_7=\begin{pmatrix}2&2&-3\\1&3&-3\\-2&2&-1\end{pmatrix},\quad A_8=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\2&2&0\end{pmatrix},$$

$$A_9=\begin{pmatrix}3&-2&2\\-4&1&4\\2&-3&5\end{pmatrix},\quad A_{10}=\begin{pmatrix}-2&-2&-3\\-1&3&-1\\4&2&5\end{pmatrix},\quad A_{11}=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\-2&1&3\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}3&1&4\\-2&-5&-3\\2&4&2\end{pmatrix},$$

$$A_{13}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\4&0&-3\\-3&4&7\end{pmatrix},\quad A_{14}=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\2&3&-3\\0&-1&-1\end{pmatrix},\quad A_{15}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\4&5&-3\\-3&-1&-4\end{pmatrix},\quad A_{16}=\begin{pmatrix}1&5&1\\4&6&-3\\-3&5&5\end{pmatrix},$$

$$A_{17}=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\-2a-3&a+3&-1\\-2a+1&a-1&2\end{pmatrix},\quad A_{18}=\begin{pmatrix}2&3&9-2a\\3&2&9-a\\-1&-1&a-4\end{pmatrix},\quad A_{19}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&3&a-2\\1&-1&a+2\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}2&2&-3&1\\1&3&-3&1\\0&2&-1&1\\-2&-4&6&-1\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}1&-2&2&-2\\-1&-3&1&-1\\4&-6&-1&4\\2&-3&-2&5\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}2&3&6&-3\\1&0&2&-1\\1&1&1&-1\\4&4&8&-5\end{pmatrix}$$

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 適当な正則行列 P によって対角化できるかどうか判定せよ。対角化できるものには、P および対角行列を与えよ。

68. A を n 次正方行列とする。

(1) A の固有値は ${}^tA$ の固有値でもあることを示せ。

(2) A の固有ベクトルは ${}^tA$ の固有ベクトルでもあると言えるか？証明または反例を与えよ。

69. V を n 次元ベクトル空間、T を V 上の線形変換とする。T は互いに相異なる n 個の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をもつとし、固有値 λ_k に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_k$ とする。

(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は線形独立であることを示せ。

(2) (1) および $\dim V = n$ より、$\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ は V の基底となる。T のこの基底に関する行列を求めよ。

70. 行列 A および多項式 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(n \geq 1, a_n \neq 0)$ に対し、行列 $f(A)$ を $f(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ で定義する。ただし、$A^0 = E$(単位行列) とする。

(1) λ を A の固有値、$\boldsymbol{v}$ を固有値 λ に対する A の固有ベクトルとする。このとき、$f(\lambda)$ は $f(A)$ の固有値で $\boldsymbol{v}$ は固有値 $f(\lambda)$ に対する $f(A)$ の固有ベクトルであることを示せ。

(2) $f(A) = O$(零行列) ならば、A の任意の固有値は n 次方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ。

(3) A が対角行列ならば $f(A)$ も対角行列であることを示せ。

(4) A が対角化可能ならば $f(A)$ も対角化可能であることを示せ。

71. 以下の行列 $A_1 \sim A_4$ のうちの 2 つに対して下の問 (1),(2),(3) に答えよ。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 特性多項式を求めよ。

(2) 固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) 適当な正則行列 P によって対角化できるかどうか判定せよ。対角化できるものには、P および対角行列を与えよ。

72. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ に対して次の 2 つの命題 (a),(b) が同値であることを示せ。

(a) A は線形独立な n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を持つ

(b) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P が存在する

73. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ に対する次の 2 つの命題を考える。

(P1) $A^k = O$ となる正の整数 k が存在するならば $A = O$ である。

(P2) A の固有値が λ のみならば $A = \lambda E$ である。

(1) 命題 (P1),(P2) は、A が対角化可能であると仮定すると正しいことを示せ。

(2) 命題 (P1),(P2) の反例を作れ。

74. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ は ${}^tA = A,\ A^2 = A$ を満たすとする。

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ が成り立つことを示せ。

(2) $\mathbf{R}^n = \mathrm{Im}A + \mathrm{Im}(E - A)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}A,\ \boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(E - A)$ ならば $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であることを示せ。

(4) $W=\mathrm{Im}A$ とおくと $\mathbf{R}^n=W\oplus W^{\perp}$ が成り立つことを示せ。**75.**　次の各行列に対して、以下の問に答えよ。

$$A_1=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&-1&-3\\-3&-3&4\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-3&2&-1\\3&-1&2\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-3&4&-1\\2&2&1\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1&1&-1\\4&2&2\\-4&-1&5\end{pmatrix},$$

$$A_5=\begin{pmatrix}5&-1&2\\2&2&4\\-1&1&2\end{pmatrix},\quad A_6=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\3&0&3\\2&1&1\end{pmatrix},\quad A_7=\begin{pmatrix}-1&3&2\\2&1&1\\0&3&1\end{pmatrix},\quad A_8=\begin{pmatrix}4&-2&-3\\-3&1&-3\\1&-1&2\end{pmatrix},$$

$$A_9=\begin{pmatrix}3&-2&3\\-1&2&-5\\1&-1&-3\end{pmatrix},\quad A_{10}=\begin{pmatrix}-2&2&-2\\3&-1&3\\1&1&1\end{pmatrix},\quad A_{11}=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&0&-6\\2&-2&-1\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}-2&2&5\\3&-1&3\\1&1&3\end{pmatrix}$$

(1) 特性多項式を求めよ。

(2) 固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) 適当な正則行列 P によって対角化できるかどうか判定せよ。対角化できるものには、P および対角行列を与えよ。

76.　次の各行列に対して、以下の問に答えよ。

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}6&2&1\\2&6&-1\\1&-1&3\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}-3&3&-2\\3&-3&2\\-2&2&1\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}6&3&-2\\3&-10&2\\-2&2&1\end{pmatrix},$$

$$A_5=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&6&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix},\quad A_6=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\2&5&3\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad A_7=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&4&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix},\quad A_8=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

(1) <u>直交行列</u> を用いて対角化せよ。

(2) スペクトル分解を求めよ。

77.　以下の (1)~(3) を証明せよ。ただし、E は n 次単位行列とし、内積は $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{C}^n$ に対して $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}$ で定義する。

(1) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{C}^n,\ A\in\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ に対して $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A^*\boldsymbol{y})$ が成り立つ。

(2) $A\in\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ が $A^*=A$ を満たすならば（このような行列を**エルミート行列**という）A の固有値は実数である。

(3) $A\in\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ が $A^*A=E$ を満たすならば（このような行列を**ユニタリー行列**という）A の固有値は絶対値 1 の複素数である。