代数学幾何学演習 II (No.010)

利根川 聡

2003 年 12 月 5 日

78. 次の各行列を、ユニタリー行列を用いて対角化せよ。さらにスペクトル分解を求めよ。

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1+4i & -3+i \\ 1+3i & 2+2i \end{pmatrix},\quad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2}i \\ 1 & 1 & -\sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i & \sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix},\quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix},\quad A_9 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix},\quad A_{11} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix},\quad A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

79. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ に対する次の 3 つの命題を考える。

(P1) $\lambda \in \mathbf{C}$ が A の固有値ならば、$\bar{\lambda} \in \mathbf{C}$ は A^* の固有値である。

(P2) $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ が固有値 λ に属す A の固有ベクトルならば、$\boldsymbol{x}$ は固有値 $\bar{\lambda}$ に属す A^* の固有ベクトルでもある。

(P3) A の異なる固有値に属す固有ベクトルは互いに直交する。

(1) 命題 (P1) は、任意の行列 A に対して正しいことを示せ。

(2) A を正規行列とする。このとき命題 (P2) が正しいことを、以下の手順で示せ。以下では、$\alpha \in \mathbf{C},\ \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$ とする。

(a) $(A - \alpha E)^* = A^* - \bar{\alpha}E$ を示せ。

(b) $A - \alpha E$ が正規行列であることを示せ。

(c) $\|(A - \alpha E)\boldsymbol{y}\| = \|(A^* - \bar{\alpha}E)\boldsymbol{y}\|$ を示せ。

(d) 命題 (P2) を示せ。

(3) 命題 (P2) の反例を作れ。

(4) 命題 (P3) は、A が正規行列ならば正しいことを示せ。

(5) 命題 (P3) の反例を作れ。

80. V をユニタリ空間とする。

(1) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して次の等式が成立することを示せ。($i=\sqrt{-1}$)

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4}\Big(||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2+i||\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}||^2-i||\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}||^2\Big)$$

(2) V 上の線形変換 T に対して、以下の条件 (a)〜(e) が全て同値であることを示せ。

(a) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V,\ (T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (内積を保存する)

(b) $\forall \boldsymbol{x}\in V,\ ||\boldsymbol{x}||=1\Rightarrow ||T\boldsymbol{x}||=1$ (単位ベクトルを単位ベクトルに写す)

(c) $\forall \boldsymbol{x}\in V,\ ||T\boldsymbol{x}||=||\boldsymbol{x}||$ (長さを保存する)

(d) V のある正規直交基底に対して T の表現行列はユニタリ行列になる

(e) V の任意の正規直交基底に対して T の表現行列はユニタリ行列になる

81. 以下の行列 $A_1\sim A_4$ のうちの 2 つに対して下の問 (1),(2),(3) に答えよ。

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&-3\\-2&-1&2\\-1&3&-1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&1&1\\-4&-3&-3\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}2&-3&2\\-2&4&-2\\-4&1&0\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&-2\\3&-2&3\end{pmatrix}$$

(1) 特性多項式を求めよ。

(2) 固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) 適当な正則行列 P によって対角化できるかどうか判定せよ。対角化できるものには、P および対角行列を与えよ。

82. 次の各行列を、ユニタリー行列を用いて対角化せよ。さらにスペクトル分解を求めよ。

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&5&1\\2&1&5\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&2&4\\2&4&2\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&2\\0&2&1\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}-3&1&4\\1&5&-4\\4&-4&2\end{pmatrix},$$

$$A_5=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&5&2\\2&2&5\end{pmatrix},\quad A_6=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-7&7\\-1&7&-4\end{pmatrix},\quad A_7=\begin{pmatrix}2&-4&2\\-4&2&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix},\quad A_8=\begin{pmatrix}-3&2&2\\2&1&3\\2&3&1\end{pmatrix},$$

$$A_9=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\2&-2&-6\end{pmatrix},\quad A_{10}=\begin{pmatrix}7&-3&-6\\-3&-1&2\\-6&2&2\end{pmatrix},\quad A_{11}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-1&3&-2\\2&-2&-3\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}6&1&4\\1&6&-4\\4&-4&-9\end{pmatrix}$$

83. $A\in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ をエルミート行列とする。このとき、A の固有値は全て実数である (**77.**(2) 参照) が、これらのうち最大のものを α、最小のものを β とする。

(1) 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$ に対して、内積 $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ は実数であることを示せ。

(2) 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$ に対して $\beta\|\boldsymbol{x}\|^2\le(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\le\alpha\|\boldsymbol{x}\|^2$ が成り立つことを示せ。

(3) (2) の不等式において等号が成立するのは $\boldsymbol{x}$ がどのようなベクトルのときか？

84. 問題 **76.**,**78.**,**82.** の行列について、以下の問に答えよ。

(1) 半正値エルミート行列を探し、その行列 A に対して $B^2=A$ を満たす半正値エルミート行列 $B(=\sqrt{A})$ を求めよ。

(2) 各行列 A に対して $B^2 = A^*A$ を満たす半正値エルミート行列 $B(= \sqrt{A^*A} = |A|)$ を求めよ。

85. $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ を半正値対称行列とする。このとき、以下のことが成り立つことを示せ。

(1) 任意の $P \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ に対して ${}^t\!PAP$ も半正値対称行列である。

(2) $a_{ii} \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

(3) $B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ も半正値対称行列ならば、$\mathrm{tr}AB \geq 0$ が成り立つ。

(4) A は正値 $\Leftrightarrow$ A は正則

(5) A が正値ならば、任意の正則行列 $P \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ に対して ${}^t\!PAP$ も正値である。

86. 次の各行列に対して、以下の問に答えよ。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2a+2 & 5a+1 & -2a \\ 5a+1 & -2a+2 & 2a \\ -2a & 2a & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 7a+1 & -2a & -2a \\ -2a & -a+1 & a \\ -2a & a & -a+1 \end{pmatrix}$$

(1) $\displaystyle\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} (A_k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, $\displaystyle\min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} (A_k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ の値を a を用いた式で表せ。

(2) A_k が正値行列となるような a の値の範囲を求めよ。

87. $f(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 6yz + 2zx$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) $f(x, y, z) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$ が成り立つような実対称行列 A を求めよ。

(2) A を直交行列で対角化せよ。

(3) 任意の $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ に対して $-(x^2 + y^2 + z^2) \leq f(x, y, z) \leq 6(x^2 + y^2 + z^2)$ が成り立つことを示せ。

(4) $f(x, y, z) = 6(x^2 + y^2 + z^2)$ が成り立つとき x, y, z の間に成り立つ関係式を求めよ。

88. $\mathbf{R}^3$ 上の 2 次形式 f を $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2a(xy + yz + zx)$ で定義する。ただし a は実数の定数とする。

(1) $f(x, y, z) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$ が成り立つような実対称行列 A を求めよ。

(2) A を直交行列で対角化せよ。

(3) f の値は、原点を通るある直線 l の周りの回転に関して不変であることを示し、直線 l の方程式を求めよ。

(4) 任意の $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ に対して $f(x, y, z) \geq 0$ となるために a が満たすべき必要十分条件を求めよ。