代数学幾何学演習 II (No.011)

利根川 聡

2003 年 12 月 19 日

89. W をユニタリ空間 (複素計量線形空間)V の部分空間とし、$\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ を W の正規直交基底とする。また、V 上の線形変換 T を $T\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k$ で定義する。

(1) $\boldsymbol{x} \in W$ ならば $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ ならば $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が成り立つことを示せ。

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $T^2\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x},\ (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y})$ が成り立つことを示せ。

注：(1),(2) より、T は W への射影子である。

90. V をユニタリ空間、T を $T^2\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x},\ (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y})\ (\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$ を満たす V 上の線形変換とする。また、$W = \mathrm{Im}\, T$ とおく。

(1) $\boldsymbol{x} \in W$ ならば $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\boldsymbol{x} \in W^{\perp} \ \Leftrightarrow\ T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が成り立つことを示せ。

注：(1) および (2) の $\Rightarrow$ より、T は W への射影子である。

91. $V = \mathbf{R}^3,\ W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array} \right\},\ W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| 2x - 5y + 3z = 0 \right\}$ とおく。

(1) W_1 の正規直交基底を 1 つ求めよ。

(2) W_2 の正規直交基底を 1 つ求めよ。

(3) V の W_1 への射影子の標準基底に関する行列を求めよ。

(4) V の W_2 への射影子の標準基底に関する行列を求めよ。

ヒント：(3),(4) では、**89.** の線形変換 T の作り方を参考にするとよい。

92. A は n 次対称行列で、固有値が全てわかっているとする。このとき、A によって定まる二次形式の符号の求め方を説明せよ。

93. 次の二次形式の符号を求めよ。(12)〜(16) は a の値によって場合分けせよ。

(1) $xy + yz + zx$　(2) $xy + yz + zw$　(3) $xy + yz + zw + wx$　(4) $x^2 + y^2 + 2xz + 2yz$

(5) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 4zx$　(6) $3y^2 - 5z^2 + 6xy + 4yz - 2zx$　(7) $2xy - 2xz - xw + 2yz - yw - 2zw$

(8) $2x^2+y^2+4z^2+w^2+2xy-6xz-2yz+2zw$　(9) $x^2+2y^2-z^2+3w^2-4xy+2xw-4yz+8zw$

(10) $2x^2+5y^2+2z^2+4xy-4yz-2zx$　(11) $x^2+4y^2+2z^2-2w^2+2xz-2xw-4yz+4yw-4zw$

(12) $x^2+ay^2+z^2+2xy+2ayz+2azx$　(13) $x^2+y^2+z^2+2axy+2ayz+2zx$　(14) $x^2+2y^2+az^2+2xy-2yz$

(15) $x^2+ay^2+2z^2-2xy-2ayz+2zx$　(16) $x^2+5ay^2+5z^2-2xy-4ayz+4zx$

94. n 次実行列 $X=(x_{ij})$ に対して、n^2 個の変数 x_{ij} に関する以下の二次形式 $F(X)$ の符号を求めよ。

(1) $F(X)=\mathrm{tr}({}^tXX)$　(2) $F(X)=\mathrm{tr}(X^2)$

(3) $F(X)=\mathrm{tr}({}^tXAX)$（$A$ は符号 (p,q) の n 次実対称行列とする）

no95 以下の行列に対して、下の問 (1),(2) に答えよ。(注：答だけでなく、答を求める過程も書け)

$$A_1=\begin{pmatrix}5 & 2+3i\\ 2-3i & -7\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -4 & -4\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}4 & 1+i & 1-i\\ 1-i & 3 & -i\\ 1+i & i & 3\end{pmatrix}$$

(1) ユニタリー行列を用いて対角化せよ。

(2) スペクトル分解を求めよ。

96. $x,y,z\in\mathbf{R}$ が $x^2+y^2+z^2=1$ を満たしながら動くとき、次の二次形式の最大値・最小値を求めよ。

$$f_1(x,y,z)=xy+yz+zx,\qquad f_2(x,y,z)=x^2+yz,\qquad f_3(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$$

97. 二次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ を C とする。

(1) C が楕円となるために定数 a,b,c が満たすべき条件を求めよ。

(2) C が楕円であるとき、xy 平面の C によって囲まれる領域の面積を a,b,c を用いて表せ。

98. 次の二次曲線、二次曲面について以下の問に答えよ。

(a) $xy+y=0$　(b) $x^2+2y^2+2xy-2x+2y+3=0$　(c) $x^2+2xy+y^2+4\sqrt{2}y-8=0$

(d) $5x^2+2xy+5y^2-10x-2y-7=0$　(e) $4x^2+12xy+4y^2-12x-8y+9=0$

(f) $2x^2-2xy-4y^2+3x+6y-2=0$　(g) $9x^2+12xy+4y^2-15x-10y+6=0$

(h) $x^2+3y^2+3z^2-2yz-2y+6z+2=0$　(i) $x^2+2y^2+z^2+2xy-2yz+2y-4z-1=0$

(j) $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-2x-2y-2z-1=0$　(k) $x^2+y^2-z^2-6x-8y+10z=0$

(l) $3x^2+3y^2+3z^2-2yz+4\sqrt{2}zx-12x-6\sqrt{2}y+6\sqrt{2}z-1=0$　(m) $2xy+2yz+2zx-1=0$

(1) 係数行列、拡大係数行列の符号を求めよ。

(2) 標準形を求めよ。

99. a,b を実数の定数とし、$C=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid ax^2+y^2-4axy+2ax+(4a-2)y+b=0\}$ とおく。

(1) 任意の $b\in\mathbf{R}$ に対して $C\neq\phi$ となるような a の値を全て求めよ。

(2) C がただ一点のみから成るために a,b が満たすべき条件を求め、さらにその点の座標を求めよ。

(3) C が互いに直交する二直線から成るような a,b の値の組 (a,b) を全て求めよ。

(4) $C \neq \phi$ が有界集合となるために a, b が満たすべき条件を求めよ。

100. A を 3 次対称行列、$\boldsymbol{b}$ を 3 次列ベクトル、c を定数とし、方程式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + c = 0$ で表される二次曲面を C とする。ここで $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。

(1) A は逆行列をもつとする。このとき、$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + A^{-1}\boldsymbol{b}$ とおくと $\boldsymbol{x}'$ は ${}^t\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}' - {}^t\boldsymbol{b}A^{-1}\boldsymbol{b} + c = 0$ を満たすことを示せ。

(2) A は直交行列 U を用いて ${}^tUAU = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ と対角化されるとする。このとき、$\boldsymbol{x}' = {}^tU\boldsymbol{x}$ とおくと $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ は $d_1X^2 + d_2Y^2 + d_3Z^2 + 2({}^tU\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}') + c = 0$ を満たすことを示せ。

(3) A が正値対称行列のとき、$\boldsymbol{b}A^{-1}\boldsymbol{b} - c$ の値によって二次曲面 C を楕円面・一点・空集合のいずれか 1 つに特定できる。特定法を説明せよ。