代数学幾何学演習 II (小テスト 001a の解答)

栗野 俊一

2003 年 6 月 20 日 (Ver 0.01)

1 定義の書き出し

次の用語の定義についての問いに答えなさい。

(ベクトル空間) 空間 V が「ベクトル空間」であるために必要な条件を 8 つ全てあげよ。

[**解答例**] 条件は、以下の通り。

I (加法群) 演算 **和** $(x,y) \in V \times V \to x+y \in V$ が定まり、次の (1) - (4) を満す。

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (結合律)

(2) $x+y = y+x$ (可換律)

(3) $\exists!$ 0 s.t. $[x+0 = 0+x = x (\forall x \in V)]$ (単位元の存在)

(4) $\forall x \in V \exists! x'(=-x)$s.t.$[x+x' = x'+x = 0]$ (逆元の存在)

II (スカラー倍) 演算 **スカラー倍** $(a,x) \in \mathbf{C} \times V \to ax \in V$ が定まり、次の (5) - (8) を満す。

(5) (a+b)x = ax + bx (分配律)

(6) a(x+y) = ax + ay (分配律)

(7) (ab)x = a(bx) (結合律)

(8) 1x = x

(線型写像) 線型空間 V, V' 間の写像 T が、「線型写像」であるために必要な条件を 2 つあげよ。

[**解答例**] 条件は、以下の通り。

$$\begin{aligned} T(ax) &= aT(x) \\ T(x+y) &= T(x)+T(y) \end{aligned}$$

(線型変換) 線型空間 V, V' 間の線型写像 T が「線型変換」であるために必要な条件を 1 つあげよ。

[解答例] 条件は、以下の通り。

$$V = V'$$

(同型) 線型空間 V, V' が「同型」であるための条件を 1 つあげよ。

[解答例] 条件は、以下の通り。

$$\text{同型対応}\phi : V \to V'\text{が存在する。}$$

(基底) n 個のベクトル $(v_1, v_2, .., v_n)$ が線型空間 V の「基底」であることの条件を 2 つあげよ。

[解答例] 条件は、以下の通り。

1. 各ベクトル $v_i(i = 1..n)$ は互いに線型独立

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ..c_nv_n = 0 \to c_i = 0(i = 1..n)$$

2. V の任意の要素 x は、$v_i(i = 1..n)$ の線型和で表すことができる。

$$\forall x \in V \exists c_i \in K \text{s.t.} x = c_1v_1 + c_2v_2 + ..c_nv_n$$

(次元) 線型空間 V の「次元」が n であるための条件を 1 つあげよ。

[解答例] 条件は、以下の通り。

n 個のベクトル $(v_1, v_2, .., v_n)$ が線型空間 V の「基底」になっている

(部分空間) 線型空間 V の部分集合 W が V の「部分空間」であるための条件を 1 つあげよ。

[解答例] 条件は、以下の通り。

W が V と同じベクトル和とスカラー倍に関して K 上ベクトル空間になっている。

(線型写像に対応する行列) 行列 A がそれぞれ基底 $(E; \phi), (E' : \phi')$ を基底としてもつ線型空間 V から V' への「線型写像 T に対応する行列」であるための条件を 1 つあげよ。

[解答例] 条件は、以下の通り。

$$A = \phi' \cdot T \cdot \phi^{-1}$$

(線型変換の Rank) V から V' への「線型写像 T の Rank 」が、n であるための条件を 1 つあげよ。

[解答例] 条件は、以下の通り。

$$dim(T(V)) = n(= rank(T))$$

2　連立方程式

次の連立方程式を解きなさい。

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & y & + & z & - & 2w & = & 1 \\
2x & - & y & + & z & - & w & = & 3 \\
-x & - & 2y & - & z & - & w & = & -2
\end{array}
\right.
$$

[解答例] まず、拡張配列を作成し、基本行列をかける[1]ことにより対角化[2]を行う。

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\
2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\
-1 & -2 & -1 & -1 & -2
\end{array}\right)
&\xrightarrow[(2)-2\times(1)]{}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\
0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\
-1 & -2 & -1 & -1 & -2
\end{array}\right) \\
&\xrightarrow[(3)+1\times(1)]{}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\
0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\
0 & -1 & 0 & -3 & -1
\end{array}\right) \\
&\xrightarrow[(3)-\dfrac{1}{3}\times(2)]{}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\
0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -4 & -\frac{4}{3}
\end{array}\right) \\
&\xrightarrow[(1)+\dfrac{1}{3}\times(2)]{}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\
0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -4 & -\frac{4}{3}
\end{array}\right) \\
&\xrightarrow[(1)-2\times(3)]{}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 0 & 0 & 7 & 4 \\
0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -4 & -\frac{4}{3}
\end{array}\right) \\
&\xrightarrow[(2)+3\times(3)]{}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 0 & 0 & 7 & 4 \\
0 & -3 & 0 & -9 & -3 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -4 & -\frac{4}{3}
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

これによって、元の方程式と同値[3]な、次のような方程式が得られる。

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & & & & + & 7w & = & 4 \\
 & - & 3y & & & - & w & = & -3 \\
 & & & - & \frac{1}{3}z & - & w & = & -\frac{4}{3}
\end{array}
\right.
$$

---

[1]この操作を「基本変形」と呼ぶ。
[2]この操作を「ガウス=ザイデル法」と呼ぶ。
[3]つまり「解が同じ」ということ。

よって、これを、それぞれ x, y, z で解けば、次のようになる。

$$\begin{cases} x = -7w + 4 \\ y = -\frac{1}{3}w + 1 \\ z = -3w + 4 \end{cases}$$

そこで、パラメータ変数 t を導入し、$w = 3t$ とすれば、解答は、次のようになる。

$$\begin{cases} x = -21t + 4 \\ y = -t + 1 \\ z = -9t + 4 \\ w = 3t \end{cases}$$

3 行列式

以下の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

[**解答例**] 基本行列をかけることにより上三角行列化[4]を行う。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[(2)+\times(1)]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)-2\times(1)]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-\frac{1}{2}\times(2)]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

[4] この操作を「ガウスの消去法」と呼ぶ。

$$\xrightarrow[(4)+\dfrac{1}{2}\times(2)]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)+\times(3)]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

この上三角行列式の値は、元の行列式と同じ値を持つ。

ここで上三角行列式の値は、対角要素の積となるので、解答は次のように与えれる。

$$1 \times 2 \times -\frac{1}{2} \times 7 = -7$$

4 基底

次の漸化式で表現される数列全体からなる線型空間 V の基底を求めなさい。

$$V = \{\{x_n\} | 2x_{n+2} - x_{n+1} - 3x_n = 0\}$$

[解答例] これは、三項関係式なので、二つの項が決定すれば、三つ目の項目も自動的に確定する。

従って、ここの要素を確定するには、初項 x_1 と第二項 x_2 が確定すれば、要素 $\{x_n\}$ は一意に確定することに注意。

よって、解答は、適当に、二つの要素（つまり、 4 つの数値）を決定し、それが、基底になっている（つまり、互いに独立で、かつ、他の要素がその二つの要素の線型和で表すことができる）ことを示せばよい。

例えば、解答例としては次のようなものが考えられる。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & -1 \end{array} \right.$$

とすれば、二つの数列が以下のように定まる。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_1 & = & \{1, 1, 2, \frac{5}{2}, ...\} \\ e_2 & = & \{2, -1, \frac{1}{2}, -frac54...\} \end{array} \right.$$

この二つが、独立であることは、行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

からわかる。また、最初の二つの項で、数列が決定することから、この線型空間の次元が 2 であることわかるので、二個の独立なベクトルがあれば、それが基底になることがわかる。

5　正規直交基底

以下の基底をシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

[**解答例**]