代数学幾何学演習 II (小テスト 001b の解答)

栗野 俊一

2003 年 6 月 20 日 (Ver 0.01)

1 定義の確認

次の問いに答えなさい。

(ベクトル空間) 複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ が、実数全体の集合 $\mathbf{R}$ 上の「ベクトル空間」であることを示せ。

[**解答例**] [**Memo**] 本来は、ベクトル和とスカラー倍を指定しないかぎり、この問題は解けないのだが、ここでは、次のように定義されているものとして解く。

演算を、次のように定めればよい。

(ベクトル和) 複素数の和: すなわち、$z_1(= x_1 + y_1 i), z_2(= x_2 + y_2 i) \in \mathbf{C}$ に対して、$z_1 + z_2 = z3 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i$ とする

(スカラー倍) 実数と複素数の積: すなわち、$z(= x + yi) \in \mathbf{C}, a \in R$ に対して、$az = (ax) + (ay)i$ とする

ベクトル (線型空間) の定義に従い、8 つの条件をすべてチェックする。

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (結合律)

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (x + y) + z \\
&= ((x_1 + x_2 i) + (y_1 + y_2 i)) + (z_1 + z_2 i) \\
&= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i) + (z_1 + z_2 i) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1) + ((x_2 + y_2) + z_2)i \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1)) + (x_2 + (y_2 + z_2))i \\
&= (x_1 + x_2 i) + ((y_1 + z_1) + (y_2 + z_2)i) \\
&= x + (y + z) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

(2) $x + y = y + x$ (可換律)

$$\text{左辺} = x + y$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1 + x_2 i) + (y_1 + y_2 i) \\
&= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) i \\
&= (y_1 + x_1) + (y_2 + x_2) i \\
&= (y_1 + y_2 i) + (x_1 + x_2 i) \\
&= y + y \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

(3) $\exists!\ 0$ s.t. $[x + 0 = 0 + x = x (\forall x \in V)]$ (単位元の存在)

$0 = 0 + 0i$ を考えれば、$\forall x \in \mathbf{C}[0 + x = x + 0 = x]$ であることはすぐわかる。

また、一意性に関しては、もし、ある要素 $0'$ が、$\forall x \in \mathbf{C}[0' + x = x + 0' = x]$ を満すと仮定すれば、$0 = 0 + 0' = 0'$ となるので、$0 = 0'$ つまり、一意であることがわかる。

(4) $\forall x \in V \exists! x' (= -x)$s.t.$[x + x' = x' + x = 0]$ (逆元の存在)

$x = x_1 + x_2 i$ に対して、$x' = -x = (-x_1) + (-x_2) i$ とすれば、$x + x' = (x_1 + x_2 i) + ((-x_1) + (-x_2) i) = (x_1 + (-x_1) + ((x_2) + (-x_2)) i) = 0 + 0i = 0$ となる。

一意性に関しては x'' が、逆元の性質を満すとしたとき $x' = x' + 0 = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = 0 + x'' = x''$ なので、成立する。

(5) (a+b)x = ax + bx (分配律)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (a + b) x \\
&= (a + b)(x_1 + x_2 i) \\
&= ((a + b) x_1) + ((a + b) x_2) i \\
&= ((a x_1) + (b x_1)) + ((a x_2) + (b x_2)) i \\
&= ((a x_1) + (a x_2) i) + ((b x_1) + (b x_2) i) \\
&= a(x_1 + x_2 i) + b(x_1 + x_2 i) \\
&= ax + by \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

(6) a(x+y) = ax + ay (分配律)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= a(x + y) \\
&= a((x_1 + x_2 i) + (y_1 + y_2 i) \\
&= a((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) i) \\
&= a(x_1 + y_1) + a(x_2 + y_2) i \\
&= ((a x_1) + (a y_1)) + ((a x_2) + (a y_2)) i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= ((ax_1)+(ax_2)i)+((ay_1)+(ay_2)i)\\
&= a(x_1+x_2i)+a(y_1+y_2i)\\
&= ax+ay\\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

(7) (ab)x = a(bx) (結合律)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (ab)x\\
&= (ab)(x_1+x_2i)\\
&= ((ab)x_1)+((ab)x_2)i\\
&= (a(bx_1))+(a(bx_2))i\\
&= a((bx_1))+(bx_2)i)\\
&= a(b(x_1+x_2i)))\\
&= a(bx)\\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

(8) 1x = x

$1x = 1(x_1+x_2i) = (1x_1)+(1x_2)i = x_1+x_2i = x$

(同型) 複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ は、実数要素の二次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbf{R}\}$ と「同型」であることを示せ。

[**解答例**] [**Memo**] 同型を示すには、同型写像の存在を示す必要がある。この場合は、具体的な写像[1] を示し、それが同型写像になっていることを示せばよい。

$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{C}$ への写像 $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x+yi$ を考える。そして、この ϕ が同型写像になっていることを示す。

同型性 一対一かつ、上への写像であることを示す。

一対一 ($\phi(z_1) = \phi(z_2) \to z_1 = z_2$) $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ する。すると、$\phi(z_1) = x_1 + y_1i, \phi(z_2) = x_2+y_2i$ となる。よって、

$$
\begin{aligned}
\phi(z_1)=\phi(z_2) &\Leftrightarrow (x_1+y_1i)=(x_2+y_2i)\\
&\Leftrightarrow x_1=y_1 \wedge x_2=y_2\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow z_1=z_2
\end{aligned}
$$

[1] これを考えることが本質なのだが、まあ、慣れると、何をとればよいかわかるようになる..

上へ（$\forall y \in \mathbf{C} \exists x \in \mathbf{R}^2 \text{s.t.} \phi(x) = y$）

$y = y_1 + y_2 i$ に対して、$x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすれば、$\phi(x) = \phi(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = y_1 + y_2 i = y$

線型性 線型関数であることを示す。

ベクトル和（$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$）$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \phi(x+y) \\
&= \phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \\
&= \phi(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}) \\
&= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i \\
&= (x_1 + x_2 i) + (y_1 + y_2 i) \\
&= (x_1 + x_2 i) + (y_1 + y_2 i) \\
&= \phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \\
&= \phi(x) + \phi(y) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

スカラー積（$\phi(cx) = c\phi(x)$）

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \phi(cx) \\
&= \phi(c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \\
&= \phi(\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}) \\
&= (cx_1) + (cx_2)i \\
&= c(x_1 + x_2 i) \\
&= c\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \\
&= c\phi(x) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

以上に、より ϕ は、$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{C}$ への同型写像になる。$\mathbf{R}^2$ と $\mathbf{C}$ の間に同型写像が存在するので、この二つ

は、同型。

(基底) 二つのベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、実数要素の二次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbf{R}\}$ の「基底」になっていることを示せ。

[**解答例**] 「基底」の定義の条件をそれぞえチェックすればよい。

線型独立性（ $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0 \to c_i = 0 (i = 1..n)$ ）

$$\begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 &\Leftrightarrow c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

表現性（ $\forall x in V \exists c_i \in L \text{s.t.} x = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ ）

実は、$\frac{1}{3}(2v_1 - v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので、

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \frac{1}{3}(2v_1 - v_2) + x_2 \frac{1}{3}(v_1 + v_2) \\ &= (\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2)v_1 + (-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2)v_2 \end{aligned}$$

なので、任意の x が、 v_1 と v_2 の線型和で表現できた。

(線型変換) 実数要素の三次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbf{R}\}$ 上の関数 $T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y - x \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ に関して、次の問いに答よ。

- 関数 $T(\overrightarrow{v})$ が「線型変換」であることを示せ。

[**解答例**] **ベクトル和**

$$T(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix})$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (y_1+y_2)-(x_1+x_2) \\ z_1+z_2 \\ 0 \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} (y_1-x_1)+(y_2-x_2) \\ z_1+z_2 \\ 0+0 \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} y_1-x_1 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2-x_2 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= T(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}) + T(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix})
\end{aligned}
$$

スカラー積

$$
\begin{aligned}
T(c\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) &= T(\begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} cy-cx \\ cz \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c(y-x) \\ c(z) \\ c(0) \end{pmatrix} \\
&= c\begin{pmatrix} y-x \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= cT(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})
\end{aligned}
$$

- 線型変換 $T(\overrightarrow{v})$ の 「Rank」 を求めよ。

  [解答例] 線型変換 $T(\overrightarrow{v})$ の 「Rank」 は、$\dim T(V)$ で定義されているので、$W = \{y = T(x) | x \in V\}$ の次元を考える。

仮定より、$W = \{ \begin{pmatrix} y-x \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \}$ なので、これは、二次元である[2]。

- 線型空間 $\mathbf{R}^3$ の基底を、普通に $(< \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >; \phi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v})$ としたときの、「線型変換 T に対応する行列」を求めよ。

[解答例] $T(\overrightarrow{e_1}) = T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{e_1} = (-1)\overrightarrow{e_1} + (0)\overrightarrow{e_2} + (0)\overrightarrow{e_3}$

$T(\overrightarrow{e_2}) = T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_1} = (1)\overrightarrow{e_1} + (0)\overrightarrow{e_2} + (0)\overrightarrow{e_3}$

$T(\overrightarrow{e_3}) = T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_2} = (0)\overrightarrow{e_1} + (1)\overrightarrow{e_2} + (0)\overrightarrow{e_3}$

より、(係数を縦にならべて..)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2　連立方程式

次の連立方程式を解け。

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 2w & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & - & w & = & 3 \\ -x & - & 2y & - & z & - & w & = & -2 \end{array} \right.$$

3　行列式

以下の行列式の値を求めよ。

[2]これは、本当は、厳密にチェックする必要がある。具体てきには、W の基底を求め、その要素数を数える。

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

4　基底

次の漸化式で表現される数列全体からなる線型空間 V の基底を求めよ。

$$V = \{\{x_n\} | x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0\}$$

5　正規直交基底

以下の R^3 での基底をシュミットの直交化法を適用して、直交化せよ。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$