

代数学幾何学演習 II (小テスト 001a)

栗野 俊一

2003 年 6 月 20 日

1 諸注意

テストは、「持ち込み可」です。テキスト、ノート、計算機等なんでも利用、並びに参照して構いません。

ただし、一応、「テスト」なので、「相談」は不可です。

2 定義の書き出し

次の用語の定義についての問いに答えなさい¹。

(ベクトル空間) 空間 V が「ベクトル空間」であるために必要な条件を 8 つ全てあげよ。

(線型写像) 線型空間 V, V' 間の写像 T が、「線型写像」であるために必要な条件を 2 つあげよ。

(線型変換) 線型空間 V, V' 間の線型写像 T が「線型変換」であるために必要な条件を 1 つあげよ。

(同型) 線型空間 V, V' が「同型」であるための条件を 1 つあげよ。

(基底) n 個のベクトル (v_1, v_2, \dots, v_n) が線型空間 V の「基底」であることの条件を 2 つあげよ。

(次元) 線型空間 V の「次元」が n であるための条件を 1 つあげよ。

(部分空間) 線型空間 V の部分集合 W が V の「部分空間」であるための条件を 1 つあげよ。

(線型写像に対応する行列) 行列 A がそれぞれ基底 $(E; \quad), (E'; \quad)$ を基底としてもつ線型空間 V から V' への「線型写像 T に対応する行列」であるための条件を 1 つあげよ。

(線型変換の Rank) V から V' への「線型写像 T の Rank」が、 n であるための条件を 1 つあげよ。

¹もちろん、教科書なり、ノートを読めば、答えられるに決っています。しかし、定義は「正確に」覚えておき、直に書き出せるようでないと、時間が足りなくなります。

なお、僕に本番の試験問題の作成が回ってくるかどうかは、はなはだ疑問ですがもし、そんなことになれば、この手の問題は決して出しません。

3 連立方程式

次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} x + y + z - 2w = 1 \\ 2x - y + z - w = 3 \\ -x - 2y - z - w = -2 \end{cases}$$

4 行列式

以下の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

5 基底

次の漸化式で表現される数列全体からなる線型空間 V の基底を求めなさい。

$$V = \{\{x_n\} | 2x_{n+2} - x_{n+1} - 3x_n = 0\}$$

6 正規直交基底

以下の基底をシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$