代数学幾何学演習 II (小テスト 001b)

栗野 俊一

2003 年 6 月 20 日

1 諸注意

テストは、「持ち込み可」です。テキスト、ノート、計算機等なんでも利用、並びに参照して構いません。

ただし、一応、「テスト」なので、「相談」は不可です。

2 定義の確認

次の問いに答えなさい。

(ベクトル空間) 複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ が、実数全体の集合 $\mathbf{R}$ 上の「ベクトル空間」であることを示せ。

(同型) 複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ は、実数要素の二次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbf{R}\}$ と「同型」であることを示せ。

(基底) 二つのベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、実数要素の二次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbf{R}\}$ の「基底」になっていることを示せ。

(線型変換) 実数要素の三次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbf{R}\}$ 上の関数 $T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y - x \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ に関して、次の問いに答よ。

- 関数 $T(\overrightarrow{v})$ が「線型変換」であることを示せ。
- 線型変換 $T(\overrightarrow{v})$ の 「Rank」 を求めよ。
- 線型空間 $\mathbf{R}^3$ の基底を、普通に $(< \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >; \phi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v})$ としたときの、「線型変換 T に対応する行列」を求めよ。

3　連立方程式

次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x + y + z - 2w = 1 \\ 2x - y + z - w = 3 \\ -x - 2y - z - w = -2 \end{cases}$$

4　行列式

以下の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

5　基底

次の漸化式で表現される数列全体からなる線型空間 V の基底を求めよ。

$$V = \{\{x_n\} | x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0\}$$

6　正規直交基底

以下の R^3 での基底をシュミットの直交化法を適用して、直交化せよ。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$