代数学幾何学演習II (小テスト 002a の解答)

栗野 俊一

2003 年 11 月 28 日 (Ver 0.02)

1 準備

以下、学籍番号が 1234 番として、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_1 &= 2 \\ v_2 &= 3 \\ v_3 &= 4 \end{cases}$$

の場合の回答を示す。

2 正規直交基底

(1) 次の R^4 のベクトルをシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{you}$$

[解答例] 与えられたベクトルを、順に v_1, v_2, v_3, v_4 と置き、更に、正規直交化されたベクトルを e_1, e_2, e_3, e_4 と置く。

シュミットの直交化法より、

$$e'_1 = v_1 \quad (1)$$

$$e_1 = \frac{e'_1}{|e'_1|} \quad (2)$$

$$e'_2 = v_2 - (v_2 e_1) e_1 \quad (3)$$

$$e_2 = \frac{e'_2}{|e'_2|} \quad (4)$$

$$
\begin{aligned}
e'_3 &= v_3 - (v_3 e_1)e_1 - (v_3 e_2)e_2 && (5)\\
e_3 &= \frac{e'_3}{|e'_3|} && (6)\\
e'_4 &= v_4 - (v_4 e_1)e_1 - (v_4 e_2)e_2 - (v_4 e_3)e_3 && (7)\\
e_4 &= \frac{e'_4}{|e'_4|} && (8)\\
& && (9)
\end{aligned}
$$

なので、これに従って、順番に計算する。

$$
\begin{aligned}
e'_1 &= v_1 && (10)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (11)\\
|e'_1| &= \sqrt{(e'_1 e'_1)} && (12)\\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})} && (13)\\
&= \sqrt{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} && (14)\\
&= \sqrt{1} && (15)\\
&= 1 && (16)\\
e_1 &= \frac{e'_1}{|e'_1|} && (17)\\
&= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (18)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (19)\\
& && (20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v_2 e_1) &= (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) && (21) \\
&= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 && (22) \\
&= 1 && (23) \\
e'_2 &= v_2 - (v_2 e_1) e_1 && (24) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (25) \\
&= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} && (26) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} && (27) \\
|e'_2| &= \sqrt{(e'_2 e'_2)} && (28) \\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})} && (29) \\
&= \sqrt{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} && (30) \\
&= \sqrt{1} && (31) \\
&= 1 && (32) \\
e_2 &= \frac{e'_2}{|e'_2|} && (33) \\
&= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} && (34)
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

$$(v_3 e_1) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{37}$$

$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \tag{38}$$

$$= 0 \tag{39}$$

$$(v_3 e_2) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \tag{40}$$

$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \tag{41}$$

$$= 0 \tag{42}$$

$$e'_3 = v_3 - (v_3 e_1) e_1 - (v_3 e_2) e_2 \tag{43}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$|e'_3| = \sqrt{(e'_3 e'_3)} \tag{46}$$

$$= \sqrt{(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})} \tag{47}$$

$$= \sqrt{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} \tag{48}$$

$$= \sqrt{1} \tag{49}$$

$$= \quad 1 \tag{50}$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{|e_3'|} \tag{51}$$

$$= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

$$\tag{54}$$

$$(v_4 e_1) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{55}$$

$$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \tag{56}$$

$$= 4 \tag{57}$$

$$(v_4 e_2) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \tag{58}$$

$$= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \tag{59}$$

$$= 3 \tag{60}$$

$$(v_4 e_3) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \tag{61}$$

$$= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \tag{62}$$

$$= 2 \tag{63}$$

$$e_4' = v_4 - (v_4 e_1)e_1 - (v_4 e_2)e_2 - (v_4 e_3)e_3 \tag{64}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (65) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (66) \\
|e'_4| &= \sqrt{(e'_4 e'_4)} && (67) \\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})} && (68) \\
&= \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} && (69) \\
&= \sqrt{1} && (70) \\
&= 1 && (71) \\
e_4 &= \frac{e'_4}{|e'_4|} && (72) \\
&= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (73) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (74) \\
& && (75)
\end{aligned}
$$

これより、求める回答は、

$$
e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となる。

(2) 次の R^4 のベクトルをシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{you}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[**解答例**] 前問と同様に計算を行う。

$$e'_1 = v_1 \tag{76}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

$$|e'_1| = \sqrt{(e'_1 e'_1)} \tag{78}$$

$$= \sqrt{(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})} \tag{79}$$

$$= \sqrt{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} \tag{80}$$

$$= \sqrt{1} \tag{81}$$

$$= 1 \tag{82}$$

$$e_1 = \frac{e'_1}{|e'_1|} \tag{83}$$

$$= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{84}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{85}$$

$$\tag{86}$$

$$
\begin{aligned}
(v_2 e_1) &= (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) && (87) \\
&= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 && (88) \\
&= 0 && (89) \\
e_2' &= v_2 - (v_2 e_1) e_1 && (90) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (91) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (92) \\
|e_2'| &= \sqrt{(e_2' e_2')} && (93) \\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})} && (94) \\
&= \sqrt{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} && (95) \\
&= \sqrt{1} && (96) \\
&= 1 && (97) \\
e_2 &= \frac{e_2'}{|e_2'|} && (98) \\
&= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (99) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (100)
\end{aligned}
$$

$$ \tag{101} $$

$$
\begin{aligned}
(v_3 e_1) &= (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) && (102) \\
&= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 && (103) \\
&= 2 && (104) \\
(v_3 e_2) &= (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) && (105) \\
&= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 && (106) \\
&= 4 && (107) \\
e'_3 &= v_3 - (v_3 e_1) e_1 - (v_3 e_2) e_2 && (108) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (109) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} && (110) \\
|e'_3| &= \sqrt{(e'_3 e'_3)} && (111) \\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix})} && (112) \\
&= \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0} && (113) \\
&= \sqrt{10} && (114) \\
e_3 &= \frac{e'_3}{|e'_3|} && (115)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{116}$$

$$\tag{117}$$

$$(v_4 e_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{118}$$

$$= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \tag{119}$$

$$= 0 \tag{120}$$

$$(v_4 e_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \tag{121}$$

$$= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \tag{122}$$

$$= 1 \tag{123}$$

$$(v_4 e_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{124}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0) \tag{125}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}} \tag{126}$$

$$e'_4 = v_4 - (v_4 e_1) e_1 - (v_4 e_2) e_2 - (v_4 e_3) e_3 \tag{127}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{128}$$

$$= \frac{3}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{129}$$

$$
\begin{aligned}
|e'_4| &= \sqrt{\left(\frac{3}{10}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\frac{3}{10}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)} && (130)\\
&= \frac{3}{10}\sqrt{(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0} && (131)\\
&= \frac{3}{10}\sqrt{2} && (132)\\
&= \frac{3\sqrt{2}}{10} && (133)\\
e_4 &= \frac{e'_4}{|e'_4|} && (134)\\
&= \frac{10}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} && (135)\\
&= \frac{5\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} && (136)\\
& && (137)
\end{aligned}
$$

これより、求める回答は、

$$
e_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ e_3 = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix},\ e_4 = \frac{5\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}
$$

となる[1]

(3) 以下の C^3 のベクトルをシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。ただし、i は、虚数単位 $(i=\sqrt{-1})$ である。

$$
\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_0+i\\0\\1-v_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}
$$

[**解答例**] これも定義通りである。ただし、気を付なければならないのは、内積を計算する場合に、後ろのベクトルの要素は、共役複素数の値を利用することである。

[1]ベクトルの前のスカラー係数を中に掛けないといけないかもしれないが、まあ、余り気にしてもしょうがないでしょう。気になる人は、そこまで計算しよう。

$$
\begin{aligned}
e'_1 &= v_1 && (138)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} && (139)\\
|e'_1| &= \sqrt{(e'_1 e'_1)} && (140)\\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix})} && (141)\\
&= \sqrt{0\cdot\overline{0}+1\cdot\overline{1}+i\cdot\overline{i}} && (142)\\
&= \sqrt{0\cdot 0+1\cdot 1+i\cdot(-i)} && (143)\\
&= \sqrt{2} && (144)\\
e_1 &= \frac{e'_1}{|e'_1|} && (145)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} && (146)\\
& && (147)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v_2 e_1) &= (\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}) && (148)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}) && (149)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}((1+i)\cdot\overline{0}+0\cdot\overline{1}+(-3)\cdot\overline{i}) && (150)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}((1+i)\cdot 0+0\cdot 1+(-3)\cdot(-i)) && (151)\\
&= \frac{3i}{\sqrt{2}} && (152)\\
e'_2 &= v_2-(v_2 e_1)e_1 && (153)\\
&= \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}-\frac{3i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} && (154)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{3i}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} && (155) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cdot (1+i) - (3i) \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - (3i) \cdot 1 \\ 2 \cdot ((-3) - (3i) \cdot i \end{pmatrix} && (156) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix} && (157) \\
|e_2'| &= \sqrt{(e_2' e_2')} && (158) \\
&= \sqrt{(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix})} && (159) \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(\begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix})} && (160) \\
&= \sqrt{(2+2i) \cdot \overline{(2+2i)} + (-3i) \cdot \overline{(-3i)} + (-3) \cdot \overline{(-3)}} && (161) \\
&= \sqrt{(2+2i) \cdot (2-2i) + (-3i) \cdot (3i) + (-3) \cdot (-3)} && (162) \\
&= \sqrt{8+9+9} && (163) \\
&= \sqrt{26} && (164) \\
e_2 &= \frac{e_2'}{|e_2'|} && (165) \\
&= \frac{1}{\sqrt{26}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix} && (166) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix} && (167) \\
& && (168)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v_3 e_1) &= (\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}) && (169) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}) && (170) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot \overline{0} + i \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{i}) && (171) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot 0 + i \cdot 1 + 1 \cdot (-i)) && (172) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0) && (173) \\
&= 0 && (174) \\
(v_3 e_2) &= (\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix}) && (175) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{26}}(\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix}) && (176) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{26}}(0 \cdot \overline{2+2i} + i \cdot \overline{-3i} + 1 \cdot \overline{-3}) && (177) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{26}}(0 \cdot (2-2i) + i \cdot (3i) + 1 \cdot (-3)) && (178) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{26}}(-3-3i) && (179) \\
&= \frac{-3-3i}{2\sqrt{26}} && (180) \\
e_3' &= v_3 - (v_3 e_1) e_1 - (v_3 e_2) e_2 && (181) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{-3-3i}{2\sqrt{26}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix} && (182) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3-3i}{104} \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix} && (183) \\
&= \frac{1}{104}(104 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} - (-3-3i) \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix}) && (184)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{104}\begin{pmatrix} 104\cdot 0 - \overline{(-3-3i)\cdot(2+2i)} \\ 104\cdot i - \overline{(-3-3i)\cdot -3i} \\ 104\cdot 1 - \overline{(-3-3i)\cdot(-3)} \end{pmatrix} && (185)\\
&= \frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12i \\ 9-113i \\ 95+9i \end{pmatrix} && (186)\\
|e_3'| &= \sqrt{(e_3' e_3')} && (187)\\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12i \\ 9-113i \\ 95+9i \end{pmatrix}\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12i \\ 9-113i \\ 95+9i \end{pmatrix}\right)} && (188)\\
&= \frac{1}{104}\sqrt{\left(\begin{pmatrix} -12i \\ 9-113i \\ 95+9i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12i \\ 9-113i \\ 95+9i \end{pmatrix}\right)} && (189)\\
&= \frac{1}{104}\sqrt{(-12i)\cdot\overline{(-12i)} + (9-113i)\cdot\overline{(9-113i)} + (95+9i)\cdot\overline{(95+9i)}} && (190)\\
&= \frac{1}{104}\sqrt{(-12i)\cdot(12i) + (9-113i)\cdot(9+113i) + (95+9i)\cdot(95-9i)} && (191)\\
&= \frac{1}{104}\sqrt{144 + (81+12769) + (9025+81)} && (192)\\
&= \frac{1}{104}\sqrt{22090} && (193)\\
&= \frac{\sqrt{22090}}{104} && (194)\\
e_3 &= \frac{e_3'}{|e_3'|} && (195)\\
&= \frac{104}{\sqrt{22090}}\cdot\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12i \\ 9-113i \\ 95+9i \end{pmatrix} && (196)\\
&= \frac{1}{\sqrt{22090}}\begin{pmatrix} -12i \\ 9-113i \\ 95+9i \end{pmatrix} && (197)\\
& && (198)
\end{aligned}
$$

これより、求める回答は、

$$
e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix},\ e_2 = \frac{1}{2\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 2+2i \\ -3i \\ -3 \end{pmatrix},\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{22090}}\begin{pmatrix} -12i \\ 9-113i \\ 95+9i \end{pmatrix}
$$

となる。

ユニタリ空間 $V = C^3$ 上の線型変換に対応する、次の行列 A について、以下の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} v_2 & i & -1 \\ -i & v_2 & -i \\ -1 & i & v_2 \end{pmatrix}$$

[**解答例**] これはエルミート行列 $(U^* = U)$ なので、ユニタリ行列を利用して対角化できることに注意しよう。

(1) この行列の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めなさい。

[**解答例**] 定義より、

$$\Phi_A(x) = |A - xE|$$

なので、これを計算する。

$$\Phi_A(x) = |A - xE| \tag{199}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 3 & -i \\ -1 & i & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{vmatrix} \tag{200}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & i & -1 \\ -i & 3-x & -i \\ -1 & i & 3-x \end{vmatrix} \tag{201}$$

$$= (3-x)^3 + i \cdot (-i) \cdot (-1) + (-1) \cdot i \cdot (-i) \tag{202}$$

$$-(3-x) \cdot i \cdot (-i) - i \cdot (-i) \cdot (3-x) - (-1) \cdot (3-x) \cdot (-1) \tag{203}$$

$$= (3-x)^3 - 3(3-x) - 2 \tag{204}$$

$$= 27 - 27x + 9x^2 - x^3 - 9 + 3x - 2 \tag{205}$$

$$= -x^3 + 9x^2 - 24x + 16 \tag{206}$$

$$\tag{207}$$

これより、答えは、

$$-x^3 + 9x^2 - 24x + 16$$

(2) この行列の固有値を求めなさい。

[**解答例**] これは、上で求めた固有多項式 $\Phi_A(x)$ から作る固有方程式 $\Phi_A(x) = 0$ を満す値 (固有根/固有根) であるので、それを求める。

$$-x^3+9x^2-24x+16=0$$

これは三次方程式なので、直接公式等に代入して解くのではなく、定数項の約数を解候補と考えて、幾つか try してみる。

幸い、1 を代入してみると..

$$\begin{aligned}\Phi_A(1) &= -(1)^3+9(1)^2-24(1)+16 && (208)\\ &= -1+9-24+16 && (209)\\ &= 0 && (210)\\ & && (211)\end{aligned}$$

と、0 になるので、元の式は、1 を根として持つことになる。そこで、$\Phi_A(x)$ を $x-1$ でわり、次数をさげると、

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_A(x)}{x-1} &= x^2-8x+16 && (212)\\ & && (213)\end{aligned}$$

となる。これを解くと.

$$x^2-8x+16=(x-4)^2=0$$

よって、

$$x=4(\text{重})$$

したがって、回答は、次のようになる[2]。

$$x=1,4(\text{重})$$

(3) A の固有値に対応した固有ベクトルで、V の正規直交基底となる u_1,u_2,u_3 を求めなさい。

[**解答例**] 基本的な考え方は、固有値に対応した固有ベクトルを求め、それから、正規直交系を作ればよい。その時に、シュミットを利用することができる。

一つの固有値に対応する固有ベクトルは、一般に (少くても長さと方向で自由度があるので..)、一つには定まらない。固有ベクトル全体からなる集合はベクトル空間になっており、これを固有空間と呼ぶ。

固有ベクトル v は、式

[2] 細かいことを言えば、固有方程式の根は、多重度も含めて 3 個 (1, 4, 4) であるが固有値は、2 個 (1, 4) でよい。

$$Av = \alpha v$$

を満すので、これから、

$$\begin{aligned} Av - \alpha v &= 0 \quad (214) \\ Av - \alpha E v &= 0 \quad (215) \\ (A - \alpha E)v &= 0 \quad (216) \\ & \quad (217) \end{aligned}$$

ということが解る。

従って、固有値 α に対応した固有空間 W_α は、

$$W_\alpha = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \|(A - \alpha E)v\}$$

と表現できる。そこで、その W_α の基底で都合の良いものを選択すればよい。

固有値 1 に対応する固有ベクトル このベクトルは、固有値が重根ではなかったので、一つだけ定まる。固有空間 W_1 は、次のように定まる。

$$W_1 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} |(A - E)v = 0\}$$

これは、

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 3 & -i \\ -1 & i & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (218)$$

$$\begin{pmatrix} 3-1 & i & -1 \\ -i & 3-1 & -i \\ -1 & i & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (219)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 2 & -i \\ -1 & i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (220)$$

より、

$$\begin{cases} 2x_1 & +ix_2 & -x_3 & = 0 \\ -ix_1 & +2x_2 & -ix_3 & = 0 \\ -x_1 & +ix_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$$

という方程式を表している。

そこで、これを解き、x_1, x_2, x_3 の満すべき式を求める[3]。ここで、二つめの式を i 倍して三番目の式をから引くと一つ目式の (-1) 倍になっていることがわかるので、意味があるのは、二つの式だけであることがわかる[4] 。

式を単純にするために、一つ目の式に三つ目の式を 2 倍して足すと、

$$\begin{aligned} 3ix_2 \quad +3x_3 & = 0 \\ x_2 & = -x_3 \end{aligned}$$

同様に、二つ目の式に三つ目の式を $2i$ 倍して足すと、

$$\begin{aligned} -3ix_1 \quad +3x_3 & = 0 \\ x_1 & = -ix_3 \end{aligned}$$

となる。これから、(媒介変数 t を考え、$x_3 = t$ として..)

$$\begin{cases} x_1 & = & -it \\ x_2 & = & -t \\ x_3 & = & t \end{cases}$$

となるので、固有空間 W_1 は、

$$W_1 = \{v = \begin{pmatrix} -it \\ -t \\ t \end{pmatrix} | t \in C\}$$

と表すこともできる。このようなベクトルの内、後の計算が楽なように、$t = -1$ を選び、

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を選ぶ。この v_1 が、W_1 の基底になっている[5]。

更に、$|v_1|$ で割って、正規化する。

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} \tag{221}$$

[3]これは、あくまでも、この固有空間 W_1 の基底 v_1 を「簡単」に求めるために行う作業である。

[4]本来、この空間の要素 v が、3 つの変数 (x_1, x_2, x_3) で表現されるので、3 次元のはずであるが、それに対して 2 つの式が与えられるので、2 つ次元が下り、結局この空間の次元は $1(= 3 - 2)$ 次元となることがわかる。

[5]一次元なので、0 ベクトル以外の W_1 の要素はどれでも W_1 の基底になる。

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{222}$$

$$\tag{223}$$

これが、W_1 の正規直交基底[6]

固有値 4 に対応する固有ベクトル このベクトルは、固有値が (二) 重根だったので、二つの独立した固有ベクトルが取れる可能性がある[7]。もし、二つの独立した固有ベクトルが取れなければ、元の行列が対角化できないことに注意しよう[8]

固有空間 W_4 は、次のように定まる。

$$W_4 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} |(A-4E)v = 0\}$$

この結果、同様にして、変数 x_1, x_2, x_3 の満すべき方程式が次のように与えられる。

$$\begin{cases} -x_1 & +ix_2 & -x_3 & = 0 \\ -ix_1 & -x_2 & -ix_3 & = 0 \\ -x_1 & +ix_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

この式は一つ目と二つ目が全く同じであり、また、二つ目も一つ目の定数 (i) 倍になっているだけなので、結局意味があるのはこの内の一つだけであることがわかる[9] 。

結局、固有空間 W_4 は、次のように表すことができる。

$$W_4 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} |x_1 + -ix_2 + x_3 = 0\}$$

この中から二つ、ベクトルを選ぶことになるが、計算を楽にするために、できるだけ 0 を沢山含んだベクトルを考える。

この場合は、例えば、$x_2 = 0$ にし、更に $x_1 = 1$ とすれば、自動的に $x_3 = -1$ と決るので、これを v_2 とする。

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

---

[6]一つしかないベクトルで、直交というのは、奇妙に感じるかもしれないが、一つの要素からなる基底は、定義により常に直交基底になるということである。

[7]逆に、単重 (重根でない根) であれば、前問と同様に固有ベクトルが一つしかないので、解りやすい。

[8]もちろん、この問題の場合は、元の行列 A が、エルミート行列なので、対角化ができる (つまり、ベクトルが二つ取れる..) ことがわかっているので心配ないのだが..。

[9]よって、3 次元の空間で、それを制限する式が一つなので、全体の次元は 2 次元となり、この結果として、独立したベクトルが 2 つとれることがわかる。

同様に、$x_1 = 0, x_2 = 1$ とすれば、$x_3 = i$ となり、

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

なので、これで二つの独立したベクトルが得られたことになる[10] 。

ここで、v_2, v_3 は確かに、W_4 の基底[11] なのだが、正規直交系になっていないので、シュミットの直交化を行い直交化する[12]。

$$\begin{aligned}
u_2' &= v_2 && (224)\\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (225)\\
|u_2'| &= \sqrt{(u_2' u_2')} && (226)\\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})} && (227)\\
&= \sqrt{1 \cdot \overline{1} + 0 \cdot \overline{0} + (-1) \cdot \overline{(-1)}} && (228)\\
&= \sqrt{2} && (229)\\
u_2 &= \frac{u_2'}{|u_2'|} && (230)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (231)\\
& && (232)
\end{aligned}$$

[10]本来は、本当に独立なのかを調べる必要がある。しかし、一つの要素が 0 であるベクトルは、少くても、その要素が 0 でなく、かつ、そのベクトルで 0 でない要素が 0 となっているベクトルとは独立であることが分っているので、この例のように、一方は、x_1 が 0 で x_2 が 0 でないベクトルで、他方が、x_1 が 0 でなくて、x_2 が 0 とすれば、自動的に、この二つのベクトルは独立となる。

ちなみに、このベクトルの取りかたは、かなり恣意的であることに注意しよう。どの次元の要素を 0 にするかで、異なる回答が色々考えられるし、また、同じ要素を 0 にしても、少くても、符号の取り方に任意性があるので、同じ答えになるという保証はない。

また、いずれかの要素を 0 にするというのは、計算を楽にするための工夫であり、もちろん 0 にしなければならないという理由もない。場合によっては、その方が都合がよいかもしれないということも留意する。

[11]互いに独立で、空間の次元に等しい個数のベクトルなので..。

[12]後に述べるように、「行列の対角化」を行うためには、この作業はなくても構わない。ただ、ここで、これを行っておけば、後々、作業が楽になるということである。

$$
\begin{aligned}
(v_3 u_2) &= (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) && (233)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) && (234)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{0} + i \cdot \overline{(-1)}) && (235)\\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}} && (236)\\
u_3' &= v_3 - (v_3 u_2) u_2 && (237)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{-i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (238)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (239)\\
&= \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + i \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + i \cdot 0 \\ 2 \cdot i + i \cdot (-1) \end{pmatrix}) && (240)\\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} && (241)\\
|u_3'| &= \sqrt{(u_3' u_3')} && (242)\\
&= \sqrt{(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix})} && (243)\\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix})} && (244)\\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(i \cdot \overline{i} + 2 \cdot \overline{2} + i \cdot \overline{i})} && (245)\\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(i \cdot (-i) + 2 \cdot 2 + i \cdot (-i))} && (246)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6} \tag{247}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} \tag{248}$$

$$u_3 = \frac{u'_3}{|u'_3|} \tag{249}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{250}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{251}$$

$$\tag{252}$$

以上で、W_1 の正規直交系 u_1 と、W_4 の正規直交系 u_2, u_3 を求めることができた。しかし、本来ならば、u_1 と u_2, u_3 の直交性を示す必要があるのだが、W_1 と W_4 が直交することが分っているので、これは考える必要がない[13]。したがって、このままこの三つが V 正規直交系であることがわかる。

したがって、回答は、

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{253}$$

となる。

(4) $U = (u_1, u_2, u_3)$ としたとき、これの逆行列 U^{-1} を求めなさい。

[**解答例**] 前問より、

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{254}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{255}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \tag{256}$$

[13] すなわち、u_1 は、u_2, u_3 とは直交していることが既に、分っている。

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{257}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{258}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \tag{259}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{260}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{261}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}i}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix} \tag{262}$$

$$\tag{263}$$

なので[14]、

$$U = (u_1, u_2, u_3) \tag{264}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix} \tag{265}$$

となる。

これから、通常の方法[15]で、U^{-1} を求めても良いが、それより簡単な方法がある。

u_1, u_2, u_3 は、正規直交系なので、これを並べた行列 $U = (u_1, u_2, u_3)$ は、ユニタリ行列である[16]。したがって、$U^{-1} = U^*$ となる[17]。

[14]さすがに、行列の要素にする場合は、外のスカラーを中の要素にかける必要がある..。

[15]ガウスの消去法等

[16]これが言いたいが為に、わざわざ、シュミットの直交化を利用してまで直交基底としたわけである。逆に、直交化が行われていなければ、逆行列をまともに計算しなければならず、こちらの方の計算の量の方が、シュミットの直交化を行う計算の量より多いので、大変になってしまう。

[17]一般に、U^{-1} を直接求めるより、U^* を求める方が簡単なので...。

したがって、

$$
\begin{aligned}
U^{-1} &= U^* \qquad (266) \\
&= \overline{{}^tU} \qquad (267) \\
&= \overline{{}^t\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix}} \qquad (268) \\
&= \overline{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}i}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix}} \qquad (269) \\
&= \begin{pmatrix} \overline{\frac{\sqrt{3}i}{3}} & \overline{\frac{\sqrt{3}}{3}} & \overline{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ \overline{\frac{\sqrt{2}}{2}} & \overline{0} & \overline{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \overline{\frac{\sqrt{6}i}{6}} & \overline{\frac{\sqrt{6}}{3}} & \overline{\frac{\sqrt{6}i}{6}} \end{pmatrix} \qquad (270) \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}i}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix} \qquad (271) \\
& \qquad (272)
\end{aligned}
$$

したがって、回答は、

$$
\begin{aligned}
U^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}i}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix} \qquad (273) \\
& \qquad (274)
\end{aligned}
$$

となる。

(5) 行列 A を対角化した $U^{-1}AU$ を求めなさい。

[**解答例**] 前問より、U, U^{-1} が分っているので、計算するだけなのだが、U は A の固有ベクトルから作られているので、

$$AU = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

が成立する。

すなわち、

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

であり、これが回答となる。