代数学幾何学演習II (小テスト 002b の解答)

栗野 俊一

2003 年 11 月 28 日 (Ver 0.01)

1 準備

以下、学籍番号が 1234 番として、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{cases} v_0 &= 3 \\ v_1 &= 5 \\ v_2 &= 1 \\ v_3 &= 1 \end{cases}$$

の場合の回答を示す。

(1) v_{you} を答えなさい。

[**解答例**] 回答は、冒頭に述べた通り、

$$\begin{cases} v_0 &= 3 \\ v_1 &= 5 \\ v_2 &= 1 \\ v_3 &= 1 \end{cases}$$

2 正規直交基底

(1) 次の R^4 のベクトルをシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{you}$$

[**解答例**] 与えられたベクトルを、順に v_1, v_2, v_3, v_4 と置き、更に、正規直交化されたベクトルを e_1, e_2, e_3, e_4 と置く。

シュミットの直交化法より、

$$
\begin{aligned}
e'_1 &= v_1 && (1)\\
e_1 &= \frac{e'_1}{|e'_1|} && (2)\\
e'_2 &= v_2 - (v_2 e_1) e_1 && (3)\\
e_2 &= \frac{e'_2}{|e'_2|} && (4)\\
e'_3 &= v_3 - (v_3 e_1) e_1 - (v_3 e_2) e_2 && (5)\\
e_3 &= \frac{e'_3}{|e'_3|} && (6)\\
e'_4 &= v_4 - (v_4 e_1) e_1 - (v_4 e_2) e_2 - (v_4 e_3) e_3 && (7)\\
e_4 &= \frac{e'_4}{|e'_4|} && (8)\\
& && (9)
\end{aligned}
$$

なので、これに従って、順番に計算する。

$$
\begin{aligned}
e'_1 &= v_1 && (10)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (11)\\
|e'_1| &= \sqrt{(e'_1 e'_1)} && (12)\\
&= \sqrt{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} && (13)\\
&= \sqrt{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} && (14)\\
&= \sqrt{1} && (15)\\
&= 1 && (16)\\
e_1 &= \frac{e'_1}{|e'_1|} && (17)\\
&= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (18)
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
(v_2 e_1) &= (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) && (21) \\
&= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 && (22) \\
&= 0 && (23) \\
e_2' &= v_2 - (v_2 e_1) e_1 && (24) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (25) \\
&= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} && (26) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} && (27) \\
|e_2'| &= \sqrt{(e_2' e_2')} && (28) \\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})} && (29) \\
&= \sqrt{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} && (30) \\
&= \sqrt{2} && (31)
\end{aligned}
$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{|e_2'|} \tag{32}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

$$(v_3 e_1) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \tag{35}$$

$$= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \tag{36}$$

$$= 0 \tag{37}$$

$$(v_3 e_2) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{38}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \tag{39}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{40}$$

$$e_3' = v_3 - (v_3 e_1) e_1 - (v_3 e_2) e_2 \tag{41}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$
\begin{aligned}
|e_3'| &= \sqrt{(e_3'e_3')} && (45)\\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix})} && (46)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0\cdot 0+0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 1} && (47)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} && (48)\\
e_3 &= \frac{e_3'}{|e_3'|} && (49)\\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} && (50)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} && (51)\\
& && (52)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v_4e_1) &= (\begin{pmatrix}3\\5\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}) && (53)\\
&= 3\cdot 0+5\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 0 && (54)\\
&= 5 && (55)\\
(v_4e_2) &= (\begin{pmatrix}3\\5\\1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}) && (56)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(3\cdot 0+5\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 1) && (57)\\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} && (58)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v_4 e_3) &= (\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) && (59) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1) && (60) \\
&= 0 && (61) \\
e'_4 &= v_4 - (v_4 e_1) e_1 - (v_4 e_2) e_2 - (v_4 e_3) e_3 && (62) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} && (63) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (64) \\
|e'_4| &= \sqrt{(e'_4 e'_4)} && (65) \\
&= \sqrt{(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})} && (66) \\
&= \sqrt{3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} && (67) \\
&= \sqrt{9} && (68) \\
&= 3 && (69) \\
e_4 &= \frac{e'_4}{|e'_4|} && (70) \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (71)
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$\tag{73}$$

これより、求める回答は、

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(2) 次の R^4 のベクトルをシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{you}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) 以下の C^3 のベクトル[1] をシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。ただし、i は、虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$) である。

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 + i \\ 0 \\ 1 - v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

[1]学籍番号 1234 の人は、

$$\begin{pmatrix} v_0 + i \\ 0 \\ 1 - v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + i \\ 0 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + i \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となる。