代数学幾何学演習 II (小テスト 002a)

栗野 俊一

2003 年 11 月 14 日

1　諸注意

テストは、「持ち込み可」です。テキスト、ノート、計算機等なんでも利用、並びに参照して構いません。

ただし、一応、「テスト」なので、「相談」は不可です。

回答は、答だけ[1]で結構（途中の計算は不要）です。

2　準備

以下、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{cases} v_0 &= \text{学籍番号の千の位} \\ v_1 &= \text{学籍番号の百の位} \\ v_2 &= \text{学籍番号の十の位} \\ v_3 &= \text{学籍番号の一の位} \end{cases}$$

として、以下の問に答えなさい。

例えば、学籍番号が 1234 番の人は、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_1 &= 2 \\ v_2 &= 3 \\ v_3 &= 4 \end{cases}$$

となる。

3　正規直交基底

(1) 次の R^4 のベクトルをシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

[1] TeX にできなければ、無理に TeX にする必要はありません。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{you}$$

(2) 次の R^4 のベクトル[2]をシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{you}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) 以下の C^3 のベクトルをシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。ただし、i は、虚数単位 $(i = \sqrt{-1})$ である。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 + i \\ 0 \\ 1 - v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

4 対角化

ユニタリ空間 $V = C^3$ 上の線型変換に対応する、次の行列 A について、以下の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} v_2 & i & -1 \\ -i & v_2 & -i \\ -1 & i & v_2 \end{pmatrix}$$

(1) この行列の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めなさい。

(2) この行列の固有値を求めなさい。

(3) A の固有値に対応した固有ベクトルで、V の正規直交基底となる u_1, u_2, u_3 を求めなさい。

(4) $U = (u_1, u_2, u_3)$ としたとき、これの逆行列 U^{-1} を求めなさい。

(5) 行列 A を対角化した $U^{-1}AU$ を求めなさい。

[2]ここで現れているベクトルが、前問と同じなのは偶然ではない。同じベクトルの組でも、直交化の順番によって結果が異なることに注意しよう。