

代数学幾何学演習 II (小テスト 002b)

栗野 俊一

2003年11月14日

1 諸注意

テストは、「持ち込み可」です。テキスト、ノート、計算機等なんでも利用、並びに参照して構いません。

ただし、一応、「テスト」なので、「相談」は不可です。

回答は、答だけ¹で結構（途中の計算は不要）です。

2 準備

以下、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{cases} v_0 = \text{学籍番号を } 7 \text{ で割った余りに } 1 \text{ を加えたもの} \\ v_1 = \text{学籍番号を } 5 \text{ で割った余りに } 1 \text{ を加えたもの} \\ v_2 = \text{学籍番号を } 3 \text{ で割った余りに } 1 \text{ を加えたもの} \\ v_3 = \text{学籍番号を } 2 \text{ で割った余りに } 1 \text{ を加えたもの} \end{cases}$$

として²、以下の問に答えなさい。

(1) v_{you} を答えなさい。

3 正規直交基底

(1) 次の R^4 のベクトルをシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

¹TeX にできなければ、無理に TeX にする必要はありません。また、TeX にする場合（推奨）でも、実際に、コンパイルできなくても（エラーが表示される状態でも..）構いません。そのまま提出してください。

²例えば、学籍番号が 1234 番の人は、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} v_0 = (1234\%7) + 1 = 2 + 1 = 3 \\ v_1 = (1234\%5) + 1 = 4 + 1 = 5 \\ v_2 = (1234\%3) + 1 = 1 + 1 = 1 \\ v_3 = (1234\%2) + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

となる。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{you}$$

(2) 次の R^4 のベクトル³をシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{you}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) 以下の C^3 のベクトル⁴ をシュミットの直交化法を適用して、直交化しなさい。ただし、 i は、虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$) である。

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 + i \\ 0 \\ 1 - v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

4 対角化

ユニタリ空間 $V = C^3$ 上の線型変換に対応する、次の行列 A について⁵、以下のに答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} v_0 + v_1 & -(v_0 - v_1)i & 0 \\ -(v_0 - v_1)i & v_0 + v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2v_3 \end{pmatrix}$$

(1) この行列の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めなさい。

(2) この行列の固有値を求めなさい。

(3) A の固有値に対応した固有ベクトルで、 V の正規直交基底となる u_1, u_2, u_3 を求めなさい。

³ここで現れているベクトルが、前問と同じなのは偶然ではない。同じベクトルの組でも、直交化の順番によって結果が異なることに注意しよう。

⁴学籍番号 1234 の人は、

$$\begin{pmatrix} v_0 + i \\ 0 \\ 1 - v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + i \\ 0 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + i \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となる。

⁵学籍番号が 1234 の人は、

$$A = \begin{pmatrix} 3 + 5 & -(3 - 5)i & 0 \\ -(3 - 5)i & 3 + 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2i & 0 \\ -2i & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

(4) $U = (u_1, u_2, u_3)$ としたとき、この逆行列 U^{-1} を求めなさい。

(5) 行列 A を対角化した $U^{-1}AU$ を求めなさい。