代数学幾何学演習 II (小テスト 003a の解答)

栗野 俊一

2004 年 1 月 23 日 (Ver 0.01)

1 準備

$$v_{you} = \begin{pmatrix} v_0 \end{pmatrix} v_1 v_2 v_3, \begin{cases} v_0 & = & \text{学籍番号を 7 で割った余りに 1 を加えたもの} \\ v_1 & = & \text{学籍番号を 5 で割った余りに 1 を加えたもの} \\ v_2 & = & \text{学籍番号を 3 で割った余りに 1 を加えたもの} \\ v_3 & = & \text{学籍番号を 2 で割った余りに 1 を加えたもの} \end{cases}$$

として[1]、以下の問に答えなさい。

[**解答例**] 以下、学籍番号が 1234 番として、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{cases} v_0 & = & 3 \\ v_1 & = & 5 \\ v_2 & = & 1 \\ v_3 & = & 1 \end{cases}$$

の場合の回答を示す。

(1) v_{you} を答えなさい。

[**解答例**]

2 スペクトル分解

ユニタリ空間 $V = C^3$ 上の線型変換に対応する、次の行列 A について、以下の問に答えなさい。

[1]例えば、学籍番号が 1234 番の人は、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} 511, \begin{cases} v_0 & = & (1234\%7) + 1 = 2 + 1 = 3 \\ v_1 & = & (1234\%5) + 1 = 4 + 1 = 5 \\ v_2 & = & (1234\%3) + 1 = 1 + 1 = 1 \\ v_3 & = & (1234\%2) + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

となる。

$$A = \begin{pmatrix} v_0 & i & -1 \\ -i & v_0 & -i \\ -1 & i & v_0 \end{pmatrix}$$

[**解答例**] これはエルミート行列 ($A^* = A$) なので、ユニタリ行列 ($U^* = U^{-1}$) を利用してスペクトル分解できることに注意しよう。

(1) この行列の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めなさい。

[**解答例**] 定義より、

$$\Phi_A(x) = |A - xE|$$

なので、これを計算する。

$$\begin{aligned}
\Phi_A(x) &= |A - xE| && (1)\\
&= \begin{vmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 3 & -i \\ -1 & i & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{vmatrix} && (2)\\
&= \begin{vmatrix} 3-x & i & -1 \\ -i & 3-x & -i \\ -1 & i & 3-x \end{vmatrix} && (3)\\
&= (3-x)^3 + i \cdot (-i) \cdot (-1) + (-1) \cdot i \cdot (-i) && (4)\\
&\quad -(3-x) \cdot i \cdot (-i) - i \cdot (-i) \cdot (3-x) - (-1) \cdot (3-x) \cdot (-1) && (5)\\
&= (3-x)^3 - 3(3-x) - 2 && (6)\\
&= 27 - 27x + 9x^2 - x^3 - 9 + 3x - 2 && (7)\\
&= -x^3 + 9x^2 - 24x + 16 && (8)\\
& && (9)
\end{aligned}$$

これより、答えは、

$$-x^3 + 9x^2 - 24x + 16$$

(2) この行列の固有値を求めなさい。

[**解答例**] これは、上で求めた固有多項式 $\Phi_A(x)$ から作る固有方程式 $\Phi_A(x) = 0$ を満す値 (固有根/固有根) であるので、それを求める。

$$-x^3+9x^2-24x+16=0$$

これは三次方程式なので、直接公式等に代入して解くのではなく、定数項の約数を解候補と考えて、幾つか try してみる。

幸い、 1 を代入してみると..

$$\begin{aligned}\Phi_A(1) &= -(1)^3+9(1)^2-24(1)+16 && (10)\\ &= -1+9-24+16 && (11)\\ &= 0 && (12)\\ & && (13)\end{aligned}$$

と、0 になるので、元の式は、1 を根として持つことになる。そこで、$\Phi_A(x)$ を $x-1$ で割り、次数を下げると、

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_A(x)}{x-1} &= x^2-8x+16 && (14)\\ & && (15)\end{aligned}$$

となる。これを解くと.

$$x^2-8x+16=(x-4)^2=0$$

よって、

$$x=4(\text{重})$$

したがって、回答は、次のようになる[2]。

固有値 は 1, 4 の二つ

(3) A の固有値に対応した固有ベクトルで、V の正規直交基底となる u_1, u_2, u_3 を求めなさい。

[**解答例**] 基本的な考え方は、固有値に対応した固有ベクトルを求め、それから、正規直交系を作ればよい。その時に、シュミットを利用することができる。

一つの固有値に対応する固有ベクトルは、一般に（少くても長さと方向で自由度があるので..）、一つには定まらない。固有ベクトル全体からなる集合はベクトル空間になっており、これを固有空間と呼ぶ。

固有ベクトル v は、式

[2]固有方程式の根は、多重度も含めて 3 個（1, 4, 4）であるが固有値は、2 個（1, 4）となる。

$$Av = \alpha v$$

を満すので、これから、

$$\begin{aligned} Av - \alpha v &= 0 && (16) \\ Av - \alpha Ev &= 0 && (17) \\ (A - \alpha E)v &= 0 && (18) \\ & && (19) \end{aligned}$$

ということが解る。

従って、固有値 α に対応した固有空間 W_α は、

$$W_\alpha = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \| (A - \alpha E)v\}$$

と表現できる。そこで、その W_α の基底で都合の良いものを選択すればよい。

固有値 1 に対応する固有ベクトル このベクトルは、固有値が重根ではなかったので、一つだけ定まる。固有空間 W_1 は、次のように定まる。

$$W_1 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | (A - E)v = 0\}$$

これは、

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 3 & -i \\ -1 & i & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 && (20) \\ \begin{pmatrix} 3-1 & i & -1 \\ -i & 3-1 & -i \\ -1 & i & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 && (21) \\ \begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 2 & -i \\ -1 & i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 && (22) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{cases} 2x_1 & +ix_2 & -x_3 & =0 \\ -ix_1 & +2x_2 & -ix_3 & =0 \\ -x_1 & +ix_2 & +2x_3 & =0 \end{cases}$$

という方程式を表している。

そこで、これを解き、x_1, x_2, x_3 の満すべき式を求める[3]。ここで、二つめの式を i 倍して三番目の式をから引くと一つ目式の (-1) 倍になっていることがわかるので、意味があるのは、二つの式だけであることがわかる[4] 。

式を単純にするために、一つ目の式に三つ目の式を 2 倍して足すと、

$$\begin{aligned} 3ix_2 \quad +3x_3 \quad &= 0 \\ x_2 \quad &= -x_3 \end{aligned}$$

同様に、二つ目の式に三つ目の式を $2i$ 倍して足すと、

$$\begin{aligned} -3ix_1 \quad +3x_3 \quad &= 0 \\ x_1 \quad &= -ix_3 \end{aligned}$$

となる。これから、(媒介変数 t を考え、$x_3 = t$ として..)

$$\begin{cases} x_1 & = & -it \\ x_2 & = & -t \\ x_3 & = & t \end{cases}$$

となるので、固有空間 W_1 は、

$$W_1 = \{v = \begin{pmatrix} -it \\ -t \\ t \end{pmatrix} | t \in C\}$$

と表すこともできる。このようなベクトルの内、後の計算が楽なように、$t = -1$ を選び、

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を選ぶ。この v_1 が、W_1 の基底になっている[5]。

更に、$|v_1|$ で割って、正規化する。

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} \tag{23}$$

[3]これは、あくまでも、この固有空間 W_1 の基底 v_1 を「簡単」に求めるために行う作業である。

[4]本来、この空間の要素 v が、3 つの変数 (x_1, x_2, x_3) で表現されるので、3 次元のはずであるが、それに対して 2 つの式が与えられるので、2 つ次元が下り、結局この空間の次元は $1(= 3 - 2)$ 次元となることがわかる。

[5]一次元なので、0 ベクトル以外の W_1 の要素はどれでも W_1 の基底になる。

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

これが、W_1 の正規直交基底[6]

固有値 4 に対応する固有ベクトル このベクトルは、固有値が (二) 重根だったので、二つの独立した固有ベクトルが取れる可能性がある[7]。

固有空間 W_4 は、次のように定まる。

$$W_4 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} |(A-4E)v = 0\}$$

この結果、同様にして、変数 x_1, x_2, x_3 の満すべき方程式が次のように与えられる。

$$\begin{cases} -x_1 & +ix_2 & -x_3 & = 0 \\ -ix_1 & -x_2 & -ix_3 & = 0 \\ -x_1 & +ix_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

この式は一つ目と二つ目が全く同じであり、また、二つ目も一つ目の定数 (i) 倍になっているだけなので、結局意味があるのはこの内の一つだけであることがわかる[8] 。

結局、固有空間 W_4 は、次のように表すことができる。

$$W_4 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} |x_1 + -ix_2 + x_3 = 0\}$$

この中から二つ、ベクトルを選ぶことになるが、計算を楽にするために、できるだけ 0 を沢山含んだベクトルを考える。

この場合は、例えば、$x_2 = 0$ にし、更に $x_1 = 1$ とすれば、自動的に $x_3 = -1$ と決るので、これを v_2 とする。

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

同様に、$x_1 = 0, x_2 = 1$ とすれば、$x_3 = i$ となり、

[6]一つしかないベクトルで、直交というのは、奇妙に感じるかもしれないが、一つの要素からなる基底は、定義により常に直交基底になるということである。

[7]逆に、単根 (重根でない根) であれば、前問と同様に固有ベクトルが一つしかないので、解りやすい。

[8]よって、3 次元の空間で、それを制限する式が一つなので、全体の次元は 2 次元となり、この結果として、独立したベクトルが 2 つとれることがわかる。

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

なので、これで二つの独立したベクトルが得られたことになる[9] 。

ここで、v_2, v_3 は確かに、W_4 の基底[10] なのだが、正規直交系になっていないので、シュミットの直交化を行い直交化する[11]。

$$\begin{aligned}
u'_2 &= v_2 && (26)\\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (27)\\
|u'_2| &= \sqrt{(u'_2 u'_2)} && (28)\\
&= \sqrt{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)} && (29)\\
&= \sqrt{1 \cdot \overline{1} + 0 \cdot \overline{0} + (-1) \cdot \overline{(-1)}} && (30)\\
&= \sqrt{2} && (31)\\
u_2 &= \frac{u'_2}{|u'_2|} && (32)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (33)\\
& && (34)
\end{aligned}$$

$$(v_3 u_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad (35)$$

[9]本来は、本当に独立なのかを調べる必要がある。しかし、一つの要素が 0 であるベクトルは、少くても、その要素が 0 でなく、かつ、そのベクトルで 0 でない要素が 0 となっているベクトルとは独立であることが分っているので、この例のように、一方は、x_1 が 0 で x_2 が 0 でないベクトルで、他方が、x_1 が 0 でなくて、x_2 が 0 とすれば、自動的に、この二つのベクトルは独立となる。

ちなみに、このベクトルの取りかたは、かなり恣意的であることに注意しよう。どの次元の要素を 0 にするかで、異なる回答が色々考えられるし、また、同じ要素を 0 にしても、少くても、符号の取り方に任意性があるので、同じ答えになるという保証はない。

また、いずれかの要素を 0 にするというのは、計算を楽にするための工夫であり、もちろん 0 にしなければならないという理由もない。場合によっては、その方が都合がよいかもしれないということも留意する。

[10]互いに独立で、空間の次元に等しい個数のベクトルなので..。

[11]「行列の対角化」の場合は、この作業は必ずしも必要はないが、スペクトル分解の場合は、直交化は行った方が、結局は、得になる。

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \tag{36}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{0} + i \cdot \overline{(-1)}) \tag{37}$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}} \tag{38}$$

$$u_3' = v_3 - (v_3 u_2) u_2 \tag{39}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{-i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$= \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + i \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + i \cdot 0 \\ 2 \cdot i + i \cdot (-1) \end{pmatrix}) \tag{42}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$|u_3'| = \sqrt{(u_3' u_3')} \tag{44}$$

$$= \sqrt{(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix})} \tag{45}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix})} \tag{46}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(i \cdot \overline{i} + 2 \cdot \overline{2} + i \cdot \overline{i})} \tag{47}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(i \cdot (-i) + 2 \cdot 2 + i \cdot (-i))} \tag{48}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{6} \tag{49}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} \tag{50}$$

$$u_3 = \frac{u_3'}{|u_3'|} \tag{51}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{53}$$

$$\tag{54}$$

以上で、W_1 の正規直交系 u_1 と、W_4 の正規直交系 u_2, u_3 を求めることができた。しかし、本来ならば、u_1 と u_2, u_3 の直交性を示す必要があるのだが、W_1 と W_4 が直交することが分っているので、これは考える必要がない[12]。したがって、このままこの三つが V 正規直交系であることがわかる。

したがって、回答は、

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{55}$$

となる。

(4) $U = (u_1, u_2, u_3)$ としたとき、これの逆行列 U^{-1} を求めなさい。

[**解答例**] 前問より、

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{59}$$

[12] すなわち、u_1 は、u_2, u_3 とは直交していることが既に、分っている。

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}i}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$\tag{65}$$

なので[13]、

$$U = (u_1, u_2, u_3) \tag{66}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix} \tag{67}$$

となる。

これから、通常の方法[14]で、U^{-1} を求めても良いが、それより簡単な方法がある。

u_1, u_2, u_3 は、正規直交系なので、これを並べた行列 $U = (u_1, u_2, u_3)$ は、ユニタリ行列である[15]。したがって、$U^{-1} = U^*$ となる[16]。

したがって、

$$U^{-1} = U^* \tag{68}$$

[13] さすがに、行列の要素にする場合は、外のスカラーを中の要素にかける必要がある..。

[14] ガウスの消去法等

[15] これが言いたいが為に、わざわざ、シュミットの直交化を利用してまで直交基底としたわけである。逆に、直交化が行われていなければ、逆行列をまともに計算しなければならず、こちらの方の計算の量の方が、シュミットの直交化を行う計算の量より多いので、大変になってしまう。

[16] 一般に、U^{-1} を直接求めるより、U^* を求める方が簡単なので...。

$$= \overline{{}^t U} \tag{69}$$

$$= \overline{{}^t\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix}} \tag{70}$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}i}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix}} \tag{71}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{\frac{\sqrt{3}i}{3}} & \overline{\frac{\sqrt{3}}{3}} & \overline{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ \overline{\frac{\sqrt{2}}{2}} & \overline{0} & \overline{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \overline{\frac{\sqrt{6}i}{6}} & \overline{\frac{\sqrt{6}}{3}} & \overline{\frac{\sqrt{6}i}{6}} \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}i}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$\tag{74}$$

したがって、回答は、

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}i}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix} \tag{75}$$

$$\tag{76}$$

となる。

(5) A の固有値に対応した射影子を、それぞれ求めなさい。

[**解答例**] まず、固有値 1 に関する射影子 P_1 を考える。これは、次のような等式を満す。

$$P_1(u_1, u_2, u_3) = (u_1, 0, 0)$$

すなわち、P_1 は、固有値 1 に対応する固有ベクトル u_1 は、そのまま保存するが、他の固有値 (ここでは 4) に対応する固有ベクトル (ここでは、u_2, u_3) は、0 ベクトルにしてしまう行列である。

$$(u_1, u_2, u_3) = U$$

なので、上記の式から

$$P_1 U = (u_1, 0, 0)$$

すなわち、

$$P_1 = (u_1, 0, 0)U^{-1}$$

となる。

後は、これに値をそれぞれ代入して、計算するだけである。

$$\begin{aligned}
P_1 &= (u_1, 0, 0)U^{-1} && (77)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}i}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}i}{6} \end{pmatrix} && (78)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} & -\frac{i}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{i}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} && (79)
\end{aligned}$$

次に、固有値 4 に対応する射影子 P_4 を考える。P_1 と同様にして、

$$P_4(u_1, u_2, u_3) = (0, u_2, u_3)$$

という性質を満すので、やはり、

$$P_4 = (0, u_2, u_3)U^{-1}$$

で計算しても良いがここでは、少し工夫してみる。

$$(0, u_2, u_3) = U - (u_1, 0, 0)$$

であることに着目すると、

$$\begin{aligned}
P_4 &= (0, u_2, u_3)U^{-1} && (80)\\
&= \{U - (u_1, 0, 0)\}U^{-1} && (81)\\
&= UU^{-1} - (u_1, 0, 0)U^{-1} && (82)\\
&= E - P_1 && (83)
\end{aligned}$$

が成立するので、結局、E（単位行列）から、上記で求めた P_1 を引けば、P_4 を計算することができる[17]。

[17] これは、当然のことで、射影子の条件は、次の二つの式が成立することだからである。

$$\begin{aligned}
E &= P_1 + P_4 && (84)\\
A &= 1P_1 + 4P_4 && (85)
\end{aligned}$$

結局、

$$P_4 = E - P_1 \tag{86}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} & -\frac{i}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{i}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{87}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{88}$$

となる。

回答は、以下の通りである。

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} & -\frac{i}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{i}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{89}$$
$$P_4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{90}$$

(6) 行列 A をスペクトル分解しなさい。

[**解答例**] 既に、射影子が得られているので、後は、それを用いて、表現するだけである。

$$A = \lambda_1 P_{\lambda_1} + \lambda_2 P_{\lambda_2} \tag{91}$$
$$= 1P_1 + 4P_4 \tag{92}$$
$$= 1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} & -\frac{i}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{i}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{93}$$
$$+4 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{94}$$

3　二次曲線、二次曲面の分類

3.1　二次曲線

次の式の表す二次曲線の名称を述べて下さい。

1. $x^2 + y^2 + 2xy = 1 - v_2$
2. $x^2 + v_0 y^2 + 2v_3 xy = 1$
3. $x^2 + y^2 + 2xy + 2v_3 x + v_2 y = 0$

3.2　二次曲面

次の式の表す二次曲面の名称を述べて下さい。

1. $x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy + 2x + 2y + 2z = -v_1$
2. $x^2 + y^2 + 2v_3 yz + 2v_2 xz = 0$
3. $xy + z^2 + v_2 x + v_3 y = 0$