

代数学幾何学演習 II (小テスト 003b)

栗野 俊一

2004 年 1 月 16 日

1 諸注意

テストは、「持ち込み可」です。テキスト、ノート、計算機等なんでも利用、並びに参照して構いません。

ただし、一応、「テスト」なので、「相談」は不可です。

回答は、答だけ¹で結構（途中の計算は不要）です。

2 準備

以下、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{cases} v_0 = \text{学籍番号を } 7 \text{ で割った余りに } 1 \text{ を加えたもの} \\ v_1 = \text{学籍番号を } 5 \text{ で割った余りに } 1 \text{ を加えたもの} \\ v_2 = \text{学籍番号を } 3 \text{ で割った余りに } 1 \text{ を加えたもの} \\ v_3 = \text{学籍番号を } 2 \text{ で割った余りに } 1 \text{ を加えたもの} \end{cases}$$

として²、以下の問に答えなさい。

(1) v_{you} を答えなさい。

3 スペクトル分解

ユニタリ空間 $V = C^3$ 上の線型変換に対応する、次の行列 A について、以下の問に答えなさい。

¹TeX にできなければ、無理に TeX にする必要はありません。また、TeX にする場合（推奨）でも、実際に、コンパイルできなくても（エラーが表示される状態でも..）構いません。そのまま提出してください。

²例えば、学籍番号が 1234 番の人は、

$$v_{you} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} v_0 = (1234\%7) + 1 = 2 + 1 = 3 \\ v_1 = (1234\%5) + 1 = 4 + 1 = 5 \\ v_2 = (1234\%3) + 1 = 1 + 1 = 1 \\ v_3 = (1234\%2) + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

となる。

$$A = \begin{pmatrix} v_0 & -i & 1 \\ i & v_0 & i \\ 1 & -i & v_0 \end{pmatrix}$$

- (1) この行列の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めなさい。
- (2) この行列の固有値を求めなさい。
- (3) A の固有値に対応した固有ベクトルで、 V の正規直交基底となる u_1, u_2, u_3 を求めなさい。
- (4) $U = (u_1, u_2, u_3)$ としたとき、これの逆行列 U^{-1} を求めなさい。
- (5) A の固有値に対応した射影子を、それぞれ求めなさい。
- (6) 行列 A をスペクトル分解しなさい。

4 二次曲線、二次曲面の分類

4.1 二次曲線

次の式の表す二次曲線の名称を述べて下さい。

1. $x^2 + y^2 + 2xy = 1 - v_2$
2. $x^2 + v_0y^2 + 2v_3xy = 1$
3. $x^2 + y^2 + 2xy + 2v_3x + v_2y = 0$

4.2 二次曲面

次の式の表す二次曲面の名称を述べて下さい。

1. $x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy + 2x + 2y + 2z = -v_1$
2. $x^2 + y^2 + 2v_3yz + 2v_2xz = 0$
3. $xy + z^2 + v_2x + v_3y = 0$