

二次形式 (代数学幾何学演習 II)

栗野 俊一

2003 年 12 月 12 日 (Ver 0.01)

1 二次形式

二次形式の応用に、二次曲線と二次曲面の分類がある。

行列 A 並びに、拡大行列 \tilde{A} を使って次のように表現される二次曲線と二次曲面は、 A, \tilde{A} の符号によって、分類される。

$$\tilde{A}[\tilde{x}] = 0$$

2 二次曲線の分類

A と \tilde{A} の符号による、二次曲線の分類は以下のようになる。

| No. | rank A | sign A | rank \tilde{A} | sign \tilde{A} | 図形 | 二次曲線 |
|-----|----------|----------|------------------|------------------|-----------|------|
| 1 | 2 | (2,0) | 3 | (2,1) | 楕円 | |
| 1' | | | | (3,0) | 空集合 | × |
| 1'' | | | 2 | (2,0) | 一点 | × |
| 2 | 2 | (1,1) | 3 | (2,1) | 双曲線 | |
| 3 | | | 2 | (1,1) | 互いに交わる二直線 | |
| 4 | 1 | (1,0) | 3 | (2,1) | 放物線 | |
| 5 | | | 2 | (1,1) | 平行な二直線 | |
| 5' | | | | (2,0) | 空集合 | × |
| 5'' | | | 1 | (1,0) | 一直線 | × |

3 二次曲面の分類

A と \tilde{A} の符号による、二次曲面の分類は以下のようになる。

| No. | rank A | sign A | rank \tilde{A} | sign \tilde{A} | 図形 | 二次曲面 |
|------|--------|--------|------------------|------------------|-------|-------|
| 1 | 3 | (3,0) | 4 | (3,1) | 楕円面 | |
| 1' | | | | (4,0) | 空集合 | × |
| 1'' | | | 3 | (3,0) | 一点 | × |
| 2 | | (2,1) | 4 | (2,2) | 一葉双曲面 | |
| 3 | | | | (3,1) | 二葉双曲面 | |
| 4 | | | 3 | (2,1) | 楕円錐面 | |
| 5 | 2 | (2,0) | 4 | (3,1) | 楕円放物面 | |
| 6 | | | | 3 | (2,1) | 楕円柱面 |
| 6' | | | (3,0) | | 空集合 | × |
| 6'' | | 2 | (2,0) | 直線 | × | |
| 7 | | (1,1) | 4 | (2,2) | 双曲放物面 | |
| 8 | | | | 3 | (2,1) | 双曲柱面 |
| 9 | 2 | | (1,1) | 互に交じわる二平面 | | |
| 10 | 1 | (1,0) | 3 | (2,1) | 放物柱面 | |
| 11 | | | | 2 | (1,1) | 平行二平面 |
| 11' | | | (2,0) | | 空集合 | × |
| 11'' | | | 1 | (1,0) | 一平面 | × |