代数学幾何学演習II (スペクトル分解)

栗野 俊一

2003 年 12 月 19 日

1 スペクトル分解

1.1 射影子

線型空間 V において、その部分空間 W が与えられたときに、行列 P が W の射影子であるとは、次のような性質を満す場合である。

- $x \in V$ で、$x = x_1 + x_2$ ただし、$x_1 \in W, x_2 \in W^{直}$ のとき $Px = x_1$ となる場合。

1.2 行列のスペクトル分解を行うとは

行列 A のスペクトル分解とは、A の固有値 $\lambda_1, .., \lambda_n$ に対して、次のような性質を持つ行列 $P_1, .., P_n$ を求めることである。

- $$P_iP_j = \begin{cases} P_i(= P_i^2) & (i = j) \\ 0(\text{零行列}) & (i \neq j) \end{cases}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} P_i = E(\text{単位行列})$$
- $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = A(\text{単位行列})$$

特に、最後の式がスペクトル分解そのものであり、P_i を具体的に求め最後の形に書き表せばよい。

1.3 スペクトル分解の方法

スペクトル分解は、要するに P_i を計算することに他ならない。

では、P_i をどのように計算するかであるが、実は、これは、対角化と良くにている。

結論から言えば、A の固有値 λ_i 対応した固有ベクトルを v_i とし、対角化と同様にこの v_i 並べた行列 $V = (v_1 v_2 .. v_n)$ を作る[1]。

ここで、今、固有値 λ_i に対応した P_i と、それに対応した固有ベクトル $v_{i1}, v_{i2}, ..v_{im}$ を考えると、実は、次の式が成立する。

$$P_i V = (0..v_{i1} v_{i2}..vim..0)$$

従って、

$$P_i = (0..v_{i1} v_{i2}..vim..0) V^{-1}$$

を計算することになる。

つまり、対角化と全く同様に、V^{-1} を求め、最後に、対応する固有値に対応する固有ベクトルの部分以外は 0 にした行列と、その逆行列の積を計算する[2] だけである。

(未完)

[1] ここまでは、対角化と全く同じ方法であることに注意。

[2] 対角化の時には、答が欲しいだけなら、V^{-1} の計算が不要だったが、スペクトル分解の場合、実際に求め、計算しなければならない。もちろん、対角化と同様ユニタリ行列が利用できるので、スペクトル分解に関しては、ユニタリ行列必須と言える。