代幾 I 演習 (all)

問題 1

複素数 α, β に対して、次の等式が成立することを示しなさい。

1. $\mathrm{Re}(\ \alpha \pm \beta\ ) = \mathrm{Re}(\ \alpha\ ) \pm \mathrm{Re}\ (\ \beta\ )$
2. $\mathrm{Im}(\ \alpha \pm \beta\ ) = \mathrm{Im}(\ \alpha\ ) \pm \mathrm{Im}\ (\ \beta\ )$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
4. $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$

問題 2　複素数 α_1, α_2 がそれぞれ、極形式

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \\ \alpha_2 &= r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))\end{aligned}$$

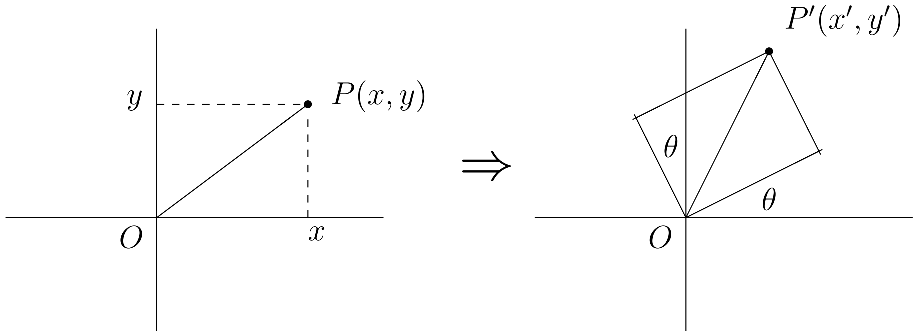
で表されているとする。、この時、次の等式が成立することを示しなさい。

1. $\alpha_1/\alpha_2 = (r_1/r_2)(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$
2. $\alpha_1^n = r_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))$
3. $e^{\alpha_1+\alpha_2} = e^{\alpha_1}e^{\alpha_2}$
4. $e^{\alpha_1-\alpha_2} = e^{\alpha_1}/e^{\alpha_2}$
5. $(e^{\alpha_1})^{\alpha_2} = e^{\alpha_1\alpha_2}$

問題 3

1. 座標平面上の点 $P(x, y)$ を y 軸に関し対称移動した点の座標を x, y を用いて表せ。
2. 座標平面上の点 $P(x, y)$ を 直線 $y = x$ に関し対称移動した点の座標を x, y を用いて表せ。
3. 座標平面上の点 $P(x, y)$ を 原点に関し対称移動した点の座標を x, y を用いて表せ。

問題 4　座標平面上の点 $P(x,y)$ を原点を中心に θ 回転移動した点の座標を x,y,θ で表す式を、次の図を用いて導け。



問題 5　座標平面上の直線 $y=mx$ が x 軸となす角を θ とする。

1. m を θ を用いて表せ。
2. 座標平面上の点 $P(x,y)$ を 直線 $y=mx$ に関し対称移動した点の座標を x, y, m を用いて表せ。

問題 6　座標平面上の点 $P(x,y)$ を原点を中心に $-\theta$ 回転移動した点を $P_1(x_1,y_1)$, $P_1(x_1,y_1)$ を x 軸に関し対称移動した点を $P_2(x_2,y_2)$, $P_2(x_2,y_2)$ を原点を中心に θ 回転移動した点を $P'(x',y')$ とする。

1. x_1,y_1 を x,y,θ を用いて表せ。
2. x_2,y_2 を x_1,y_1 を用いて表せ。
3. x',y' を x_2,y_2,θ を用いて表せ。
4. x',y' を x,y,θ を用いて表せ。

問題 7　講義での複素数の演算の定義と実数の加法および乗法に関する性質を用いて、任意の複素数 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, $\gamma=e+fi$ に対し次が成り立つことを証明せよ。式の変形の際には、複素数の演算の定義、実数の加法および乗法に関する性質のうちどれを用いた

かも示せ。

(1) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (加法についての結合法則)

(2) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (加法についての交換法則)

(3) $\alpha+0=\alpha$ (加法についての単位元)

(4) $\alpha+(-1)\alpha=0$

(5) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ (乗法についての結合法則)

(6) $\alpha\beta=\beta\alpha$ (乗法についての交換法則)

(7) $\alpha\cdot 1=\alpha$ (乗法についての単位元)

(8) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ (分配法則)

(9) $\alpha\delta=1$ となる複素数 δ が存在する。$(\alpha\neq 0)$ (乗法の逆元の存在)

問題 8 複素数の絶対値と共役複素数についての次の性質を証明せよ。

(1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$

(3) $\overline{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{\overline{\alpha}}$

(4) $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$

(5) $|\overline{\alpha}|=|\alpha|$

(6) $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$

(7) $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$

(8) $\left|\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}$

問題 9

1. 複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\alpha=\overline{\alpha}$ であることを示せ。

2. 複素数 α が純虚数 (実部が 0 の複素数) であるための必要十分条件は $\alpha=-\overline{\alpha}$ であることを示せ。

問題 10 次の複素数は実数であることを示せ。

1. $\alpha+\overline{\alpha}$, 2. $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$, 3. $(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$.

問題 11

1. $\left(\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は実数であることを示せ。

2. $\left(\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は純虚数であることを示せ。

問題 12　実数 a,b,c,d についての等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

を複素数 α, β についての等式

$$\mid \alpha \mid\mid \beta \mid = \mid \alpha\beta \mid$$

をもちいて導け。

問題 13　複素平面において α と β を表す点の間の距離は $\mid \beta - \alpha \mid$ であることを示せ。

問題 14　次の条件をみたす複素数 α の範囲を複素平面上に図示せよ。

1. $\alpha + \overline{\alpha} = 2$,　2. $\mid \alpha + 1 \mid = 2$,

3. $\mid \alpha - 1 \mid = \mid \alpha - i \mid$,　4. α^2 の偏角 $= \pi$.

問題 15　α, β, γ が複素数のとき,

$$\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

は複素平面上それぞれどのような点を表しているか。

問題 16　次の式をみたす複素数をすべて複素平面上に図示せよ。

1. $z^3 = i$,　2. $z^5 = -1$,　3. $z^2 - z + 1 = 0$,　4. $z^3 = -1 + i$.

例題　ドモアブルの公式を用いて cos と sin の倍角公式を同時に求めてみよう。

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = e^{2i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

の右辺を展開すると,

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i \cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

を得る。両辺の実部と虚部はそれぞれ等しいので,

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

となり倍角公式が同時に得られた。

問題 17　ドモアブルの公式を用いて、cos と sin の 3 倍角公式を求めよ。

問題 18

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を利用して，三角関数の積を和に直す公式,
$$\cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}(\sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi))$$
を証明せよ。
(ヒント: 右辺の形に注目して $\frac{1}{2}(e^{i(\theta+\varphi)} - e^{i(\theta-\varphi)})$ を用いることを考えてみよ。)
2. $\cos\theta\cos\varphi$ の公式と $\sin\theta\sin\varphi$ の公式を同時に導いてみよ。

問題 19　$z \neq 1$ の時に、等比数列の和の公式
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$
を利用して、次の等式を示せ。ただし、$\theta \neq 2m\pi$ $(m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ とする。

1. $$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta = \frac{1 - \cos\theta + \cos(n-1)\theta - \cos n\theta}{2(1-\cos\theta)}$$
2. $$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin(n-1)\theta = \frac{\sin\theta + \sin(n-1)\theta - \sin n\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

問題 20　$r \neq 1$ であるような正の実数 r に対し、次の和を求めよ。

1. $1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^{n-1}\cos(n-1)\theta$
2. $r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + \cdots + r^{n-1}\sin(n-1)\theta$

問題 21　次の整数の組の最大公約数を求めよ。

1.　$a = 30, b = 22$　2.　$a = 84, b = 60$,　3.　$a = 252, b = 270$,

4.　$a = 12345654321, b = 1234321$,　5.　$a = 832040, b = 2584$,　6.　$a = 2^{30}-1, b = 2^{18}-1$.

問題 22　次の式をみたすような整数 x, y を一組求めよ。

1.　$7x + 5y = 1$　2.　$13x + 11y = 1$,　3.　$30x + 42y = 6$.

問題 23　問題 21 のそれぞれの問に対し、d を a と b の最大公約数とした時，$ax + by = d$ となる整数 x, y を一組求めよ。

問題 24

1. $7x+11y=1$ となるような整数 x, y を一組求めよ。
2. 上の問の x を用いて、7 で割ると割り切れ 11 で割ると 1 余る整数をひとつ求めよ。
3. $14x+55y$ を 7 で割った余りと、11 で割った余りを求めよ。
4. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数を求めよ。
5. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数で 0 以上 77 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 25　互いに素な正整数 a, b と整数 $0 \leq r < a$ と $0 \leq s < b$ が与えられている。
　このとき、a で割ると r 余り、b で割ると s 余る整数で 0 以上 ab 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 26　a, b の最大公約数を d とし，整数 x_0, y_0 は $ax_0+by_0=d$ を満すとする。このとき，$ax+by=d$ の整数解は整数 t を用いて

$$x=x_0+\frac{bt}{d},\ y=y_0-\frac{at}{d}$$

と書くことができることを示せ。

　以下では一変数多項式を単に多項式ということにする。

問題 27　二項定理の証明をしなさい（ヒント：講義では、略証明を行っている）

問題 28

$N[x]=\{f(x)|x$ を変数とする自然数係数多項式$\}$

$C[x]=\{f(x)|x$ を変数とする複素係数多項式$\}$

　とした時に、それぞれ、$N[x]$ と、$C[x]$ が四則（和、差、積、商）と、多項式の合成に関して、閉じているならば、その証明を、閉じていないならば、その反例を挙げなさい。

問題 29　因数定理を用いて、次の代数方程式の解 (少くても整数のものが一つある) を一つ求めなさい。

1. $x^3+2x^2-9x+6=0$
2. $x^3+2x^2-3x-6=0$

3. $x^5 - x^3 - 6x^2 + 6 = 0$

4. $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$

問題 30　多項定理を用いて、次の問に答えなさい。

1. $(x+2y)^{10}$ の x^7y^3 の係数を求めなさい。

2. $(x+y+z)^{10}$ の $x^2y^3z^5$ の係数を求めなさい。

3. $(x-y+2z)^{10}$ の $x^3y^5z^2$ の係数を求めなさい。

問題 31　次の deg の性質を証明しなさい。

1. $\deg\,(f(x) \pm g(x)) \le \max(\deg\,f(x), \deg\,g(x))$

2. $\deg\,(f(x)g(x)) = \deg\,f(x) + \deg\,g(x)$ (ただし、$f(x)$ も $g(x)$ も 0 でないとする)

3. $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ で $(g(x) \neq 0, h(x)$ は商$)$ の時 $\deg\,h(x) = \deg\,f(x) - \deg\,g(x)$

問題 32　$\deg\,f(g(x))$ を $\deg\,f(x)$ と $\deg\,g(x)$ で表すと、どうなるか？

問題 33　次の多項式 $f(x)$, $g(x)$ に対し、$f(x)u(x) + g(x)v(x)$ が $f(x)$, と $g(x)$ の最大公約数になるような多項式 $u(x)$, $v(x)$ を一組求めよ。

1. $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^2 + x - 2$.

2. $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 2x - 1$.

3. $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = x^2 + x + 2$.

問題 34　多項式 $f(x)$ を $x - a$, $x - b$ $(a \neq b)$ で割った余りをそれぞれ r, s とするとき $f(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った余りを求めよ。

問題 35　$x^2 + 1$ で割ると $x - 1$ 余り、 $x^2 + x + 1$ で割ると $x + 2$ 余るような多項式の内、次数がもっとも小さいものを求めよ。

問題 36　多項式 $f(x), g(x)$ は $(x^2+1)f(x) + (x^2+x+1)g(x) = 1$ を満たすとする。

1. $(x^2+x+1)g(x)$ は x^2+x+1 で割り切れ、 x^2+1 で割ると 1 余ることを示せ。

2. $f(x)$ を用いて, x^2+1 で割ると割り切れ、x^2+x+1 で割ると 1 余る多項式をひとつ求めよ。

3. $(x+3)(x^2+1)f(x) + (x^2+x+1)g(x)$ を x^2+1, x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

4. x^2+1 で割ると $x-1$ 余り、x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余るような多項式を求めよ。
5. x^2+1 で割ると $x-1$ 余り、x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余るような多項式で次数が 3 以下のものはちょうど一つあることを示せ。

問題 37

1. $\zeta=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ とする。このとき、次の等式を示せ。
$$x^5-1=(x-1)(x-\zeta)(x-\zeta^2)(x-\zeta^3)(x-\zeta^4)$$
2. 自然数 n に対し、$\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とおく。このとき、次の等式を示せ。
$$x^n-1=(x-1)(x-\zeta)(x-\zeta^2)\cdots(x-\zeta^{n-2})(x-\zeta^{n-1})$$

問題 38
次の多項式の組の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求めよ。

1. $x^3-x^2-4x+4,\ x^2+2x-3.$
2. $x^4+x^3-3x^2+4x+2,\ x^4+x^3+5x+2.$
3. $x^3+x^2-6x+4,\ x^5+6x+5.$
4. $x^{10}+x^5+1,\ x^4+x^2+1.$

問題 39　実係数の 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ が虚根 $a+bi$ をもてば、$-2a$ も根であることを示せ。

問題 40　複素係数の多項式 $f(x)=x^3+(-2-i)x^2+(1+2i)x+(4+3i)$ とその係数をすべて共役複素数で置き換えた多項式 $g(x)=x^3+(-2+i)x^2+(1-2i)x+(4-3i)$ を考える。

1. a が $f(x)=0$ の根ならば $\overline{a}$ は $g(x)=0$ の根となることを示せ。
2. $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ と因数分解されるとき、$g(x)$ を因数分解せよ。
3. $f(x)g(x)$ は実係数の多項式となることを示せ。

問題 41　多項式 $f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$ を考える。相異なる $n+1$ 個の複素数 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ に対して、$f(a_0)=f(a_1)=\cdots=f(a_n)=0$ となるならば、$c_0=c_1=\cdots=c_n=0$ であることを証明せよ。

問題 42　多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$, $g(x) = d_0x^n + d_1x^{n-1} + \cdots + d_{n-1}x + d_n$ に対し、$h(x) = f(x) - g(x)$ に前の問題の結果を適用することで次を証明せよ。

$c_0 = d_0,\ c_1 = d_1,\ \ldots c_n = d_n$ であるための必要十分条件は相異なる $n+1$ 個の複素数 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して、$f(a_0) = g(a_0),\ f(a_1) = g(a_1),\ \ldots f(a_n) = g(a_n)$ となることである。

問題 43

1. $(x-y)^2$ は x, y についての対称式であることを示せ。
2. ω を $\omega^3 = 1$ となる $\omega \neq 1$ であるような複素数とする。$(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ は x, y, z についての対称式であることを示せ。
3. $(x_1x_2 - x_3x_4)(x_1x_3 - x_2x_4)(x_1x_4 - x_2x_3)$ は x_1, x_2, x_3, x_4 についての対称式であることを示せ。

問題 44　次の対称式を基本対称式の多項式で表わせ。

1. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,
2. $x^3 + y^3$,
3. $x^3 + y^3 + z^3$,
4. $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$.

例題　ここでは対称式 $f(x,y,z) = (x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3$ を基本対称式の多項式として表わす別の方法を考えることにする。

$f(x,y,z)$ は基本対称式 $s_1 = x+y+z,\ s_2 = xy+yz+zx,\ s_3 = xyz$ の多項式として表わすことができるが $f(x,y,z)$ が 3 次の同次式であることより、

$$f(x,y,z) = as_1^3 + bs_1s_2 + cs_3$$

と置くことができる。

この式の x, y, z に適当に数を代入してみると $-2c = f(1,1,-2) = 6,\ 8a+2b = f(1,1,0) = 10,\ a-2b = f(2,-1,0) = -1$ が得られる。これより、$a = 1,\ b = 1,\ c = -3$ となるので、

$$f(x,y,z) = s_1^3 + s_1s_2 - 3s_3$$

となることがわかる。

この方法は交代式を対称式と差積の積で表わすときにも用いることができる。

問題 45

1. $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ は α,β,γ の対称式であることを示せ。

2. 三次方程式 $x^3+3px+q=0$ の根を α,β,γ としたとき、$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ を p,q の多項式で表わせ。

3. $f(x)=x^3+3px+q$ としたとき，$f(x)=0$ が重根を持つための必要十分条件は $f(x)$ と $f'(x)=3x^2+3p$ が互いに素ではないことを示せ。また，この条件を p,q の多項式を用いて表せ。

問題 46　方程式 $x^7-1=0$ の根と係数の関係を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$$

問題 47　実数を係数とする n 次方程式 $f(x)=0$ の根を重複度も込めて、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ とする。このとき、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ の差積の 2 乗

$$\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)^2=\begin{array}{cccc}(\alpha_2-\alpha_1)^2 & (\alpha_3-\alpha_1)^2 & \cdots & (\alpha_n-\alpha_1)^2\\ & (\alpha_3-\alpha_2)^2 & \cdots & (\alpha_n-\alpha_2)^2\\ & & \cdots & \\ & & & (\alpha_n-\alpha_{n-1})^2\end{array}$$

は実数であることを示せ。

問題 48　次の交代式を差積と基本対称式で表わせ。

1. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$,

2. $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$.

問題 49　線型空間の公理

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交換法則)

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (結合法則)

3. $\exists\vec{0}\forall\vec{a}[\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}]$ (零元 [単位元] の存在)

4. $\forall\vec{a}\exists(\vec{-a})[\vec{a}+(\vec{-a})=(\vec{-a})+\vec{a}=\vec{0}]$ (逆元の存在)

5. $c(\vec{x}+\vec{y})=c\vec{x}+c\vec{y}$ (スカラー倍の分配則 I)

6. $(c+d)\vec{x}=c\vec{x}+d\vec{x}$ (スカラー倍の分配則 II)

7. $(cd)\vec{x} = c(d\vec{x})$ (スカラー倍の結合法則)

について、次の問に答えなさい。

1. 零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その 0 倍した元 $0\vec{x}$ は、零元であることを証明しなさい。
3. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その逆元の性質を満す元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniquenss)。

問題 50　次の不等式を証明しなさい。

1. $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ (シュワルツの不等式)
2. $\sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2 + (c+z)^2} \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ (三角不等式)

問題 51　次の場合に、点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ に直交する直線の方程式を求めよ。

1. $d_1 \neq 0,\ d_2 \neq 0,\ d_3 = 0$ のとき。
2. $d_1 \neq 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = 0$ のとき。

問題 52　空間内で次の条件を満たす平面の方程式を求めよ。

1. 点 $(2, 4, -3)$ を通り、$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ と直交する平面。
2. 次のパラメータ表示を持つ平面
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. 点 $(1, 2, 3)$, $(1, 0, -1)$, $(2, 2, 1)$ を通る平面。

問題 53　空間内で次の条件を満たす平面のパラメータ表示を求めよ。

1. 点 $(-2,3,1)$ を通りベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ とに平行な平面。

2. 次の方程式で表される平面。

$$3x - 2y + 5z = 6.$$

3. 点 $(1,1,2), (1,-2,-1), (3,-1,1)$ を通る平面。

問題 54　空間内で次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

1. 点 $(-1,2,-3)$ を通り、$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ と平行な直線。

2. 次のパラメータ表示を持つ平面

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. 点 $(2,2,3), (1,2,-1)$ を通る直線。

問題 55

複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ の要素 $\boldsymbol{x} = a + bi, \boldsymbol{y} = c + di$ と 実数 e に関して、普通に和 $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a+c) + (d+i)i)$ と、定数倍 ($e\boldsymbol{x} = (ea) + (eb)i$) を考えると、$\boldsymbol{C}$ 全体は、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 56

実数係数の二次式全体の集合を $R_2[x] = \{ax^2 + b^x + c | a, b, c \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$R_2[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = ax^2 + bx + c, \boldsymbol{g} = g(x) = ex^2 + fx + g$ と、実数 h に対して、普通に、和 $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a+e)x^2 + (c+f)x + (c+g))$ と、定数倍 ($h\boldsymbol{f} = (ha)x^2 + (hb)x + (hc)$) を考えるとき、$R_2[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 57　複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ の要素について、次の問に答えなさい。

1. 二つの複素数 $x = 1 + i, y = 2 - i$ と、実数 a, b に関して、もし、$ax + by = 0$ が成立するならば、実は $a = b = 0$ であることを示せ。

2. 上の問題で、a, b が複素数でもよければ、そのような複素数の組は $a = b = 0$ 以外にもあることを示せ。(ヒント: 具体的に、そのような a, b を示すだけでよい)。

3. 複素数 $z = 4 + i$ が、実数 c, d と上記の複素数 x, y を用いて $z = cx + dy$ と表現できたときに、この c, d を求めよ。

4. 任意の複素数 z に対して、必ずある実数の組 c, d が存在して、$z = cx + dy$ と表現できることを示せ。

5. 二つの複素数 x, y が、$a = b = 0$ 以外の実数に対しては、常に $ax+by \neq 0$ が成立するならば、実は、任意の複素数 z に対して、必ずある実数の組 c, d が存在して、$z = cx+dy$ と表現できることを示せ。

問題 58　次の行列 A, B とベクトル $\boldsymbol{x}$ について、以下の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Ax を求めなさい。

2. $A + B$ を求めなさい。

3. AB を求めなさい。

4. AB と BA は同じになるだろうか ? 確認してみなさい。

5. $A(Bx)$ と $(AB)x$ をそれぞれ計算してみなさい。

6. A^{-1} を求めなさい。

7. $(AB)^{-1}$ は、A^{-1} と B^{-1} で表すとどうなるか ?

問題 59　二次元の点を、原点を中心に α だけ反時計回りに回転させる行列を R_α とすると、その行列の成分は、次のようになる。

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

講義の定義では、R_α と R_β の積 ($R_\beta R_\alpha$) を、図形的な意味から $R_{\alpha+\beta}$ で定義した。
これが、一般的な行列の積の定義と矛盾していないことを示しなさい。

問題 60　空間内で次の条件を満たす直線のパラメータ表示を求めよ。

1. 点 $(1,2,3)$ を通り、$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と平行な直線。

2. 点 $(2,2,0)$, $(3,5,1)$ を通る直線。

3. 次の二つの平面の交わりとして表される直線。

$$3x - 2y + z = 4,\ x + z = 2.$$

4. 点 $(3,3,2)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とに直交する直線。

問題 61 $\quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, とするとき，次を計算せよ。

1. $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$,

2. $5\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{c}$,

3. $-\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$.

問題 62 $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線型結合として表すことはできないことを示せ。

問題 63 $\quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. $\boldsymbol{K}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

2. 上の問の結果を利用して，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

   (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\quad$ (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 64　連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x & +3y & = & 5 \\ x & +2y & = & -2 \end{cases}$$

を解き、その結果を用いて $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ が線型独立かどうかを調べよ。

問題 65

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とする。$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6)$ としたとき次の問に答えよ。

1. $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ は線型独立である。

2. $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6$ のうちどれを付け加えても線型従属になる。

問題 66　$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は線型独立であることを証明せよ。

問題 67　次を証明せよ。

1. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に同じベクトルが 2 個以上現れるなら $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に零ベクトル $\boldsymbol{0}$ が現れるならば、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

問題 68　$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が与えられたとする。$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線型結合として異なる方法で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b} &= c'_1\boldsymbol{a}_1 + c'_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c'_n\boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

と書けたとする。このとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属であることを示せ。

問題 69　次の式を行列とベクトルの積の形で書け。

$$(1) \begin{cases} 4x + 2y + 3z & = & 5 \\ -x + y + 2z & = & -3 \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x+2y &= 2 \\ -x+y &= 4 \\ 3x+5y &= 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+3z &= 1 \\ y+2z &= -1 \end{cases}$

(4) $-2x+3y+z-w \ = \ 0$.

問題 70 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \boldsymbol{K}^m$ とする。次のそれぞれの式を行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ とベクトルの積の形に書き直せ。

(1) $\boldsymbol{x} \ = \ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$

(2) $\boldsymbol{x} \ = \ 2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$

(3) $\boldsymbol{x} \ = \ -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_3$

(4) $\boldsymbol{x} \ = \ \boldsymbol{0}$

問題 71

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，次を計算せよ。

(1) $A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, (2) $A\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, (3) $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, (4) $A\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

問題 72 A を実数を成分とする二行二列 (二次の正方行列)、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を二次元 (平面) の縦ベクトル、c を実数とすると、次の線型性が成立することを示しなさい。

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}) + (A\boldsymbol{y})$$

$$(cA)\boldsymbol{x} = A(c\boldsymbol{x})$$

(ヒント:行列 A 並びに、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、等号の左辺と右辺の結果が同じであることを示せばよい)

問題 73 二つの二次の正方行列 A, B に関して、行列間の等号 「$A = B$」を、「$\forall \boldsymbol{x} \in V^2$ s.t. $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ 」で定義する (つまり、「任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が成立」した時に、「$A = B$」とする)。この時、行列 A, B の成分に関して、次の性質が成り立つことを示しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \text{に対して、} A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a &= e \\ b &= f \\ c &= g \\ d &= h \end{cases}$$

(ヒント: 右から左 ($\Leftarrow$) は、単に、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、その計算結果を比較すればよい。逆 ($\Rightarrow$) も、同様に行っても良いが、特別なベクトル $\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関しても、$A\boldsymbol{e}_0 = B\boldsymbol{e}_0, A\boldsymbol{e}_1 = B\boldsymbol{e}_1$ が成立することを利用した方が簡単になる)

問題 74　次のベクトルへの射影子を、それぞれ求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 4. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

問題 75　互いに直交する 0 でない二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し、それぞれへの射影子を、$P_{\boldsymbol{x}}, P_{\boldsymbol{y}}$ で表すとする。この時、次の等式を証明しなさい。

1. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$
2. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $P_{\boldsymbol{x}} + P_{\boldsymbol{y}} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $P_{\boldsymbol{x}} \cdot P_{\boldsymbol{y}} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ヒント:この二つのベクトルは、独立なので、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{z}$ が、実は、ある実数の組 a, b を用いて、$\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ と表されることを利用すれば...)

問題 76　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} が次の形

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{(ただし、} |ad - bc| \neq 0 \text{ の時)}$$

で表されているとする。

この時、二つの変数 x, y に関する、次の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

について、次の問に答えなさい。

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示しなさい。
2. 上記の行列 E は、任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して、$E\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ となることを示しなさい。
3. 行列 A, ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ を用いて、上記の連立方程式を表しなさい。
4. もし、行列 Aが、逆行列を持つ (すなわち、$|ad - bc| \neq 0$ の時) 場合、$A^{-1}\boldsymbol{p}$ が、上記の連立方程式の解となることを示しなさい。
5. 連立方程式

$$\begin{cases} au + bv = 0 \\ cu + dv = 0 \end{cases}$$

   の解 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を考る。すると、もし、$\boldsymbol{z}$ が元の方程式の解ならば、$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$ も、元の方程式の解になることを示しなさい。
6. 上記の性質を利用して、元の連立方程式が、唯一の解を持つならば、後の連立方程式は、$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持たないことを示しなさい。

問題 77 　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。すなわち、

$$M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \boldsymbol{R} \right\}$$

とした時、$M_{2,2}$ は、線型空間になっていることを示しなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 78 　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. $M_{2,2}$ には、零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。

2. $M_{2,2}$ の零元を求めなさい。

3. 任意の行列 A に対して、その 0 倍した元 $0A$ は、零元であることを証明しなさい。

4. 任意の行列 A に対して、その逆元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniquenss)。

5. 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆元 $-A$ を求めなさい。

6. 任意の行列 A 対して、その (-1) 倍した行列 $(-1)A$ は、その行列の逆元であることを証明しなさい。

問題 79　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. 任意の三つの行列 $A, B, C (\in M_{2,2})$ に対して、 $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示しなさい。

2. もし、任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE_1 = A$ となる行列 E_1 と、$E_2 A = A$ となるような行列 E_2 が、共に、$M_{2,2}$ の中に存在すれば、実は、この二つの E_1, E_2 は、同じ行列であることを証明せよ。

3. 任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE = EA = A$ となる行列 E ($M_{2,2}$ の単位行列と呼ぶ) を (一つ) 求めなさい。

4. 単位行列の性質を満す要素は $M_{2,2}$ には、一つしかないことを示しなさい。(ヒント: 単位行列の性質 [$AE' = E'A = A$] を満す行列 E' があると、それは、一つ前の問題で求めた行列 E と同じになることを示せばよい。)

5. ある行列 A に対して、$AB = E, CA = E$ を満す、行列 B, C が存在すれば、実は、$B = C$ であることを示しなさい。

6. ある行列 A に対して、$AX = XA = E$ を満すような行列 X が、$M_{2,2}$ に存在するときに、その行列 X を 行列 A の逆行列と呼び A^{-1} で表す。もし、行列 A に対して、その逆行列 A^{-1} が存在すれば、それは、一つしかないことを示しなさい。

7. 零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ には、逆行列が存在しないことを示しなさい。

8. 二つの行列 A, B が共に、逆行列を持つならば、二つの行列の積 AB も逆行列を持つことを示しさい。また、この時、AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を、A, B の逆行列 A^{-1}, B^{-1} を用いて表しなさい。

9. 行列 A が逆行列 A^{-1} をもてば、A を $n(n \in \boldsymbol{N})$ 回掛けあわせた行列 A^n も逆行列を持つことを示しなさい。また、A^n の逆行列 $(A^n)^{-1}$ を A^{-1} (と n) を用いて表しなさい。

問題 80　次の図形の方程式を求めなさい。

1. 二点 $(1,3),(2,5)$ を通る直線。
2. 点 $(-1,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に平行な直線。
3. 点 $(2,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直な直線。
4. 二点 $(1,-1,3),(2,-2,1)$ を通る直線。
5. 点 $(2,-1,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に平行な直線。
6. 三点 $(1,0,2),(1,-2,1),(0,0,2)$ を通る平面。
7. 点 $(1,1,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面。

問題 81　次の平面上の直線と点の距離をそれぞれ求めなさい。

1. 直線 $3x-2y=1$ と、点 $(2,-1)$。
2. 点 $(1,2)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線と、点 $(3,2)$。
3. 二点 $(2,1),(-1,4)$ を通る直線と、点 $(1,1)$。
4. 点 $(-1,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直な直線と、点 $(1,-1)$。

問題 82　次の空間上の直線と点の距離をそれぞれ求めなさい。

1. 直線 $\frac{x-1}{2}=\frac{1+2y}{3}=z+2$ と、点 $(1,3,-1)$。

2. 点 $(1,-1,2)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線と、点 $(3,2,-1)$。

3. 二点 $(1,1,2),(2,-1,4)$ を通る直線と、点 $(1,2,-1)$。

問題 83　次の空間上の平面と点の距離をそれぞれ求めなさい。

1. 平面 $x-2y+3z=10$ と、点 $(1,-2,3)$。

2. 三点 $(1,-1,1),(2,1,1),(-1,2,-2)$ を通る平面と、点 $(2,1,-1)$。

3. 点 $(1,2,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直な平面と、点 $(2,-1,1)$。

問題 84　A,B を $(2,2)$ 行列とする。

1. $AB=BA$ ならば

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2,$$

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

となることを証明せよ。

2. $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ となるような行列 A,B の例を与えよ。

問題 85　座標平面を原点を中心にして θ 回転移動したとき、点 $P(x,y)$ の移る先の点を $P(x',y')$ とする。
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を対応させる写像 T は $\boldsymbol{R}^2$ から R^2 への線型写像であることを示せ。

問題 86　上と同様のことを、原点を通る直線に関する対称移動について示せ。

問題 87　$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. $J^2=-E$ であることを示せ。

2. $a,b,c,d,e,f \in \boldsymbol{R}$ とする。このとき、次を示せ。ただし、i は虚数単位である。

$$(a+bi)+(c+di)=e+fi \iff (aE+bJ)+(cE+dJ)=eE+fJ,$$

$$(a+bi)(c+di)=e+fi \iff (aE+bJ)(cE+dJ)=eE+fJ.$$

3. $(4E-3J)A=E$ となる行列 A を求めよ。

4. $(aE+bJ)(cE+dJ)=(cE+dJ)(aE+bJ)$ であることを示せ。

問題 88　次の二つの 3 行 3 列の行列 A, B と、ベクトル $\boldsymbol{x}$ について次の問に答えなさい。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. $A+B$ を求めなさい。

2. AB を求めなさい。

3. $A(B\boldsymbol{x})$ を求めなさい。

4. $(AB)\boldsymbol{x}$ を求めなさい。

問題 89　二次元平面上の点 (x,y) に対して、点 $(2x,-3y)$ を対応させるような二次元平面上の変換 T に対して、次の問に答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。

2. T に対して、$T=T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。ただし、T_A は、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、$T_A(\boldsymbol{u})=A\boldsymbol{u}$ と、行列 A を用いて定義された変換の事である。

3. $\boldsymbol{u}=T(\boldsymbol{v})$ に対して、$S(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}$ を満すような変換 S を、T の逆変換と呼び T^{-1} で表す。この時、変換 T^{-1} は、点 (x,y) をどのような点に対応させるか？

4. $T^{-1}=T_B$ を満す行列 B を求めなさい。

5. 行列 A と行列 B はどのような関係になっているか？

問題 90　行列 A と $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ が $A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, A\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, A\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, を満たすとき $A(-\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ を求めよ。

問題 91　$\boldsymbol{K}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線型結合で

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 &= & 2\boldsymbol{v}_1 & +\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 &= & & -2\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 &= & 3\boldsymbol{v}_1 & +2\boldsymbol{v}_2 \end{cases}$$

と表されているとする。

1. $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ をそれぞれ行列とベクトルの積で表せ。

2. 行列 $(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$ を行列と行列の積で表せ。

問題 92　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が、二つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}$ であることを示しなさい。

2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = |A|$ であることを示しなさい。

3. 2 行 2 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{y})$ と表されている (ただし、$a_{22} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい

4. 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような x を求めなさい。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 93　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ が、三つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = a_{32} = a_{31} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$ であることを示しなさい。

2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |A|$ であることを示しなさい。

3. 3 行 3 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y} - \frac{a_{32}}{a_{33}}\boldsymbol{z}\ \boldsymbol{z})$ と表されている (ただし、$a_{33} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい。

4. 行列 $C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} u & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような u, v を求めなさい (このような、u, v の組は、一組とは限らないが、どれか一つを求めればよい。)。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 94　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 95　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 96　次の行列の行列式を求めなさい。

$$1.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 5.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$6.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 7.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 8.\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad 9.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 97　次の行列の行列式を求めなさい。

$$1.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad 3.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad 4.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad 6.\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad 7.\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad 8.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 98　次の二つのベクトルに対して、その二つのベクトルの張る平行四辺形の面積を求めなさい。

$$1.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 3.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 4.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題 99

次の二つのベクトルに対して、ベクトル積 (外積) を求めなさい。

$$1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 2.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 4.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題 100　次の三つのベクトルで張られる平行六面体の体積を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

問題 101　次の条件を満す、線型変換 T に対して、$T = T_A$ となるような 3 行 3 列の行列 A をそれぞれ、求めなさい。

1. $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
2. $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

問題 102　A, B, C を (m, n) 行列、c, d を複素数、O を (m, n) 型の零行列とした時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A + O = A, \quad A - A = O$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + B = B + A$
4. $c(A + B) = cA + cB$
5. $(c + d)A = cA + dA$
6. $(cd)A = c(dA)$
7. $1A = A, \quad 0A = O$

問題 103　A, B を (l, m) 行列、C, D を (m, n) 行列、$O_{p,q}$ を (p, q) 型の零行列とする時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A(C + D) = AC + AD$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $AO_{m,n} = O_{l,n}, \quad O_{l,m}C = O_{l,n}$

問題 104　行列 A の複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{cA} = \overline{c}\overline{A}$
4. $\overline{(AB)} = (\overline{A})(\overline{B})$ (ヒント:この問題は講義でおこなった)

問題 105　行列 A の転置行列を ${}^tA$, 複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(\,\overline{A}\,) = \overline{(\,{}^tA\,)}$
3. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
4. ${}^t(cA) = c{}^tA$
5. ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ (ヒント:この問題は講義でおこなった)

問題 106　T を 3 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^3$ から 2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^2$ への線型写像とし、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{K}^3$ の標準基底とする。

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ T(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ T(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

のとき次を計算せよ。

$$(1)\quad T(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}),\ (2)\quad T(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}),\ (3)\quad T(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}).$$

問題 107

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とした時、$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対し、$A\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を計算し、

$$A = (A\boldsymbol{e}_1\ A\boldsymbol{e}_2\ \cdots A\boldsymbol{e}_n)$$

となることを示せ。

問題 108　$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ を $\boldsymbol{K}^4$ の標準基底とする。

$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような $(2,4)$ 行列 A を求めよ。

問題 109

$$X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。区分けによる計算を用いて X^2, X^3, A^2, A^3, AX, XA を求めよ。

問題 110　次の行列 A, B のうち積 AB が可能なものはどれか。またそのとき AB の行の数、列の数はどうなるか。

1. A は $(2,4)$ 行列、B は $(2,3)$ 行列。
2. A は $(2,3)$ 行列、B は $(3,3)$ 行列。
3. A は $(3,1)$ 行列、B は $(3,3)$ 行列。
4. A は $(1,4)$ 行列、B は $(4,2)$ 行列。
5. A は $(3,1)$ 行列、B は $(1,2)$ 行列。
6. A は $(4,2)$ 行列、B は $(4,2)$ 行列。

問題 111　次の条件を満たす行列 A, B の例を作ってみよ。

1. 積 AB は定義できるが BA は定義できない。
2. AB, BA はどちらも定義できるが次数が異なる。
3. AB, BA はどちらも 2 次行列になるが、$AB \neq BA$ となる。
4. AB, BA はどちらも 2 次行列で、$AB = BA$ となる。

問題 112　次の計算をせよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

問題 113　　$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ とする。行列の積の結合法則を利用して A^5 を計算せよ。

問題 114

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算を行いなさい。

1. AB,　2. BA,　3. AC,　4. CA,　5. AD,　6. DA

問題 115　　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. J^2, J^3, J^4, J^5 を求めよ。
2. 二項定理を利用して $(E+J)^{10}$ を求めよ。

問題 116　　次の図の様に、A 〜 O の間に道がある時に次の問に答えなさい。

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
A & - & - & B & & & C & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & \\
D & - & - & E & - & - & F & - & - & G & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & \\
 & & & H & - & - & I & & & | & J & - & - & K \\
 & & & | & & & & & & | & | & & & \\
 & & & | & & & & & & | & | & & & \\
 & & & L & - & - & - & - & - & M & N & - & - & O
\end{array}$$

1. 行列 $X = (x_{\alpha\beta})$ (但し $\alpha = \mathrm{A} \sim \mathrm{O}, \beta = \mathrm{A} \sim \mathrm{O}$) とし、

$$x_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ と } \beta \text{ の間に道がある時}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める時 (例えば、A と B の間には道があるので x_{AB} は 1、A と C の間には道がないので、x_{AC} は 0 となる) の X を求めなさい。

2. $Y=(y_{\alpha\beta})=X^2$ とした時に、$y_{\alpha\beta}$ の値は、どんな意味を持つか？

3. D から、丁度 4 回、道を渡った時に到達する (但し、同じ場所や同じ道を何度通っても良いとする) ことができる場所はどことどこか？ また、その時、そこに到る道の種類は全部で何通りか？

問題 117　演習書の p.10 の類題 4 を解きなさい。

問題 118　演習書の p.12 の類題 6 を解きなさい。

問題 119

$$
A=\begin{pmatrix}
0&0&0&2&0&0&0&1\\
0&0&2&0&0&0&1&0\\
0&2&0&0&0&1&0&0\\
2&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1
\end{pmatrix},\quad
B=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1\\
1&0&0&0&2&0&0&0\\
0&1&0&0&0&2&0&0\\
0&0&1&0&0&0&2&0\\
0&0&0&1&0&0&0&2
\end{pmatrix}
$$

の時、次の行列の計算をしなさい。
1. AB,　2. BA　3. A^2,　4. B^2

問題 120　以下の表は、各々の野菜に 1 kg 中に含まれる、様々な栄養素の含有量である。

食品名	エネルギー	たんぱく質	炭水化物	ビタミン C	鉄
アスパラガス・若茎	220	26	39	150	7
えだまめ	1350	117	88	270	27
グリーンピース	930	153	69	190	17
かぶ・葉	200	23	39	820	21
かぼちゃ	490	16	109	160	5

また、次の表は、食堂でのある一日の三食で消費された食材の量 (kg 単位) である。

食事	アスパラガス・若茎	えだまめ	グリーンピース	かぶ・葉	かぼちゃ
朝	2	0	1	0	0
昼	0	0	0	0	3
夜	0	2	0	0	0

これについて、以下の問いに答えなさい。

1. $A = (a_{\alpha\beta})$ に対して、$a_{\alpha\beta} =$ (食品 α が含む栄養素 β の含有量) と定めた時、A を求めなさい。

2. えだまめを 2kg, かぶを 3kg, かぼちゃを 1kg 食べた時のそれぞれの栄養の含有量を求めなさい。

3. 食堂での朝、昼、晩に消費された食材に含まれるたんぱく質と、ビタミン C の含有量を求めなさい。

問題 121　演習書の p.17 の類題 11 を解きなさい。

問題 122　演習書の p.73 の類題 2 を解きなさい。

問題 123

$$A = \begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0
\end{pmatrix}$$

の時、A^n を求めなさい。

問題 124　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.6 の類題 1 の 1. の (1)

2. p.6 の類題 1 の 1. の (2)

3. p.6 の類題 1 の 2.

4. p.6 の類題 1 の 3. の (1)

5. p.6 の類題 1 の 3. の (2)

6. p.6 の類題 1 の 3. の (3)

問題 125

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とした時に次の値を求めなさい。
1. A^2,　2. A^4,　3. A^{16},　4. A^{40}

問題 126　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.7 の類題 2 の 1. の X
2. p.7 の類題 2 の 1. の Y
3. p.7 の類題 2 の 2. の X
4. p.7 の類題 2 の 2. の Y
5. p.8 の類題 3 の A
6. p.8 の類題 3 の B
7. p.8 の類題 3 の C

問題 127　三つのベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を求めなさい。
2. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ の外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}$ を求めなさい。
3. $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{z}$ が作る平行四辺形の面積を求めなさい。
4. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が作る平行六面体の体積を求めなさい。

5. $\boldsymbol{x}$ に平行で、点 $(0,0,1)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

6. $\boldsymbol{y}$ に垂直で、点 $(1,1,1)$ を通る平面の方程式を求めなさい。

問題 128　次の行列の計算をしなさい。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 129　$(3,2)$-行列 A に対し、5 次行列 B を

$$B = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$$

と定める。ただし、E_3, E_2 はそれぞれ 3 次と 2 次の単位行列である。

1. $B^2 = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & 2A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$ であることを示せ。

2. B^n を求めよ。

3. B は正則行列であることを示せ。

問題 130　(k,l) 行列 A, (l,m) 行列 B, (m,n) 行列 C に対し、${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$ となることを示せ。

問題 131　A, B, C を n 次正則行列とする。このとき、$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ。

問題 132　A を n 次正則行列とする。${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$ を用いて $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が成り立つことを示せ。

問題 133　A を n 次行列とする。この時、次の問に答えなさい。

1. A^2 が正則行列ならば、実は、A 自身も正則行列であることを示せ。

2. A が正則行列ならば、任意の整数 k に対して A^k も正則行列であることを示せ。

問題 134　A, B を次の様な形をした n 次対角行列とする。この時、次の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

1. 二つの行列の積 AB を求めなさい。
2. A が逆行列を持つ条件と、A がその条件を満す時の A の逆行列を求めなさい。

問題 135　n 次行列 A に対して $\mathrm{tr}(A)$ で、A の固有和 (trace:トレース) を表すとする ($A = \{a_{ij}\}$ の時、$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$)。この時、P が正則行列であれば、$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$ であることを示せ。

問題 136　A, B, X を n 次行列、E を n 次の単位行列とするとき、次の問に答えなさい。

1. A が正則ならば、$AX = B$ を満す行列 X は一意に決ることを示しなさい。
2. $E - A$ が正則ならば、$\sum_{i=0}^{k} A^i = (E - A^{k+1})(E - A)^{-1}$ であることを示しなさい。

問題 137　次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 138　次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 139　n 次行列 $J_n = (\delta_{i,n-j+1})(1 \leq i, j \leq n)$ (ただし、$\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタで、$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases}$ と定義されている) について、次の問に答えなさい。

1. n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して AJ_n を求めなさい。
2. n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して J_nA を求めなさい。
3. J_n は、正則行列であることを示し、その逆行列 J_n^{-1} を求めなさい。

問題 140　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.1 を解きなさい。

問題 141　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.2 を解きなさい。

問題 142　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.9 を解きなさい。

問題 143

1. $T_1 : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ と $T_2 : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ がともに線型写像ならば $T(\boldsymbol{x}) = T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x})$ で定義される $T : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ も線型写像となることを示せ。
2. $T_1 : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ 線型写像ならば $T(\boldsymbol{x}) = cT_1(\boldsymbol{x})$ で定義される $T : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ も線型写像となることを示せ。
3. $T_1 : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ と $T_2 : \boldsymbol{K}^m \to \boldsymbol{K}^l$ がともに線型写像ならば $T_2 \circ T_1 : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^l$ も線型写像となることを示せ。

問題 144　演習書の p.25 の類題 1 を解きなさい。

問題 145　演習書の p.27 の類題 3 を解きなさい。

問題 146　次の基本行列の成分を具体的に表してみよ。

1. $P_4(1, 4)$,　2. $R_3(2, 3; 3)$,　3. $Q_2(2; 2)$,　4. $P_2(1, 2)$,　5. $R_4(3, 1; -1)$

問題 147　次の基本行列の転置行列を求めよ。

1. $P_4(2, 4)$,　2. $Q_3(3; -2)$,　3. $R_4(3, 1; 3)$

次の基本行列の転置行列はどのような基本行列になるか。

4. $P_n(i, j)$,　5. $Q_n(i; c)$,　6. $R_n(i, j; c)$

問題 148　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ とする。

次の基本行列と A の積を実際に計算し、どのような基本変形を施したことになっているかを述べよ。

1. $P_3(1,3)A$,　2. $Q_3(3;-2)A$,　3. $R_3(3,2;-2)A$,
4. $AP_4(2,4)$,　5. $AQ_4(2;-2)$,　6. $AR_4(1,4;1)$

問題 149　演習書の p.11 の類題 5 を解きなさい。

問題 150　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.7 を解きなさい。

問題 151　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.1 を解きなさい。

問題 152　次の基本変形を行うためにはどの基本行列を右と左のどちらからかければよいかを答えよ。

1. $(4,3)$ 行列の 2 行目に 1 行目の -3 倍を加える。
2. $(3,3)$ 行列の 2 列目を 3 倍する。
3. $(2,4)$ 行列の 3 列目と 4 列目を交換する。
4. $(3,5)$ 行列の 3 行目を -1 倍する。
5. $(4,3)$ 行列の 3 列目に 1 列目の 2 倍を加える。
6. $(2,4)$ 行列の 1 行目と 2 行目を交換する。

問題 153　次の行列の逆行列を求め成分で具体的に表せ。

1. $P_3(2,3)$,　2. $R_2(2,1;4)$,　3. $P_3(2,3)Q_3(2;4)$,
4. $R_3(1,2;4)P_3(1,2)R_3(3,1;-2)R_3(1,3;2)$,
5. $P_2(1,2)R_2(2,1;1)R_2(1,2;-2)Q_2(1;3)$,
6. $R_3(3,2;2)Q_3(1;2)P_3(2,3)R_3(1,2;1)Q_3(3;2)R(1,3;-1)R_3(2,1;2)$

問題 154　次の行列の階数 (rank) を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,　5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$,　6. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 9. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 155　次の基本行列の積を基本行列をかけることは基本変形を行うことであるということを用いて計算せよ。

1. 基本行列は 2 次とする。

$$Q(1;-2)R(2,1;1)Q(1;2)R(1,2;-2)Q(2;3)P(1,2)R(1,2;4)R(2,1;3)P(1,2)$$

2. 基本行列は 3 次とする。

$$R(3,2;3)R(2,3;3)P(1,3)P(2,3)Q(1;3)R(2,1;-2)P(1,3)R(1,2;-1)R(2,3;2)Q(2;-2)$$

問題 156　次の行列の階数 (rank) を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, 6. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 9. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 157　次の行列の Rank (階数) を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ y & 1 & x \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 158　演習書の p.105 の 類題 2 を解きなさい。

問題 159　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.10 の類題 10 の 1.

2. p.10 の類題 10 の 2. の (1)

3. p.10 の類題 10 の 2. の (2)

問題 160　次の行列を A とする。A に行に関する基本変形を行い階段型の行列 A' にせよ。またそのとき $A' = PA$ となるような正則行列 P を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,

問題 161

1. 正方行列 A の左右から正則行列 P, Q をかけたところ $PAQ = E$ となったとする。(ただし、E は単位行列である。) A は正則行列であることを示し、A^{-1} を P, Q を用いて表わせ。

2. 正方行列 A に行および列に関する基本変形を何回か施したところ単位行列になったとする。このとき、A は正則行列であることを示せ。

問題 162　次の行列が逆行列を持つかどうかを判定し，逆行列を持つときには逆行列を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　4. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} i & 1+i & -1 \\ 1-i & 2i & 2 \\ 1 & -1+i & 3i \end{pmatrix}$　6. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　7. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　10. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

問題 163　次の行列が逆行列を持つための α の条件を定めよ。またその時の逆行列は何か。

1. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2-\alpha & 3 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 164　次の行列を A としたとき PAQ が A の階数標準形になるように正則行列 P, Q を定めよ。

1. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

問題 165　次の行列を基本行列の積で表しなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 166　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.11 を解きなさい。

問題 167　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.12 を解きなさい。

問題 168　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.13 を解きなさい。

問題 169　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.14 を解きなさい。

問題 170　演習書の p.28 の 類題 4 を解きなさい。

問題 171　演習書の p.29 の 類題 5 を解きなさい。

問題 172　演習書の p.30 の 類題 6 を解きなさい。

問題 173　演習書の p.31 の 類題 7 を解きなさい。

問題 174　演習書の p.32 の 類題 8 を解きなさい。

問題 175　演習書の p.33 の 類題 9 を解きなさい。

問題 176　演習書の p.34 の 2 章の問題の 2.2 を解きなさい。

問題 177　演習書の p.34 の 2 章の問題の 2.3 を解きなさい。

問題 178　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.4 を解きなさい。

問題 179　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.5 を解きなさい。

問題 180　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.6 を解きなさい。

問題 181　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.7 を解きなさい。

問題 182　演習書の p.61 の 類題 2 を解きなさい。

問題 183　演習書の p.62 の 類題 3 を解きなさい。

問題 184　演習書の p.63 の 類題 4 を解きなさい。

問題 185　演習書の p.64 の 類題 5 を解きなさい。

問題 186　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.2 を解きなさい。

問題 187　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.3 を解きなさい。

問題 188　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.4 を解きなさい。

問題 189　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.5 を解きなさい。

問題 190　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.6 を解きなさい。

問題 191　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.7 を解きなさい。

問題 192　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.9 を解きなさい。

集合 G の元 a, b に対し、**積**と称する第三の元 (これを ab であらわす) が定まり、次の公理を満すとき、G は**群** (group) であるという (cf. 教科書 p.248 参照)。

1. $(ab)c = a(bc)$ (結合法則)
2. **単位元** と称する特別な元 e がただ一つ存在して、G の全ての元 a に対して $ae = ea = a$ が成立する。
3. G の任意の元 a に対して、$ax = xa = e$ となるような元 x が存在する。これを a の **逆元** と呼び a^{-1} で表す。

これを参考に次の問題を解きなさい。

問題 193　K (K は C(複素数) あるいは、R(実数) を考えている。) を成分とする n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K) = \{A|A$ は n 次正方行列$\}$ は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理をみたしていることをそれぞれ示せばよい。)。

問題 194　n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K)$ は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理の少くても一つは成立していないので、その成立していない公理を示し、どのような場合に成立していないかを述べればよい。)。

問題 195　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n, K) = \{A|A$ は n 次の正方行列で、逆行列を持つ$\}$ は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 196　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n, K)$ は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 197　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 198　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 199　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい。

問題 200　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 201　n の置換の個数が、$n!$ [1] であることを示せ。

問題 202　n の置換全体の集合は、置換の合成に関して、群[2]になることを示せ。

問題 203　偶置換全体の集合[3]は、置換の合成に関して、群になる[4] ことを示せ。

問題 204　n の置換 σ は次のような互換の積で、一意に表すことができることを示せ。ただし、$p_i > q_i,\, p_i > p_{i+1},\, k < n$ となる。

$$\sigma = (p_1, q_1)(p_2, q_2)..(p_k, q_k)$$

[1] $n!$ は n の階乗と呼び、$n! = n \times (n-1) \times .. \times 2 \times 1$ である。
[2] この群を「n 次の対称群」と呼び S_n で表します。
[3] 偶置換全体は、置換全体の部分集合になっている。このように、ある群の部分集合が、同じ演算に関して、やはり群をなす場合に、この部分集合を「部分群」と呼ぶ。すなわち、偶置換全体の集合は、置換全体の集合の部分群である。
[4] この群を「n 次の交代群」と呼び A_n で表します。

6 の置換の内、例えば、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

は、0 を 3 に、3 を 4 に、そして 4 を 0 に変換している。このように、n の置換の内 $k(\leq n)$ 個の要素を順番に入れ替えるような置換を、「巡回置換」と呼び、その入れ替える要素を並べて表す (上の例では、$(0,3,4)$ と表す)。また、入れ替える要素の個数を巡回置換の長さ (上の例では 3) と呼ぶ。置換は、循環置換の特別な場合 (すなわち $k=2$ の場合) と考えることができる。

この時、次の問に答えよ。

問題 205　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ の逆置換が、再び、長さ k の逆置換になることを示しなさい。また、この時、その逆置換は、どのような形になるか ?

問題 206　長さ k の巡回置換の一つを σ とする。この時、置換の集合 $\{\sigma, \sigma^2(=\sigma\sigma), \sigma^3, .., \sigma^k\}$ が群になることを示しなさい。

問題 207　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ が、次のような $k+1$ 個の互換の積で表現できることを示しなさい。

$$(a_1, a_2, .., a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_2)(a_2, a_3)..(a_{k-1}, a_k)(a_1, a_k)$$

問題 208　任意の置換は、巡回置換の積で表現できることを示せ。

問題 209　行列式の定義に従って 4 次の行列式を求めなさい。

問題 210　次の等式を満たすように置換 τ を定めよ。

1. $a_{\sigma(1)3}a_{\sigma(2)4}a_{\sigma(3)2}a_{\sigma(4)1} = a_{\sigma\tau(1)1}a_{\sigma\tau(2)2}a_{\sigma\tau(3)3}a_{\sigma\tau(4)4}$

次の等式を満たすように置換 τ を σ を用いて表せ。

2. $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)} = a_{\tau(1)1}a_{\tau(2)2}a_{\tau(3)3}a_{\tau(4)4}$

[行列の冪と冪零]

行列 A に対して、A を k 回掛けた結果を A の k 回の冪 (巾) と呼び A^k で表す。特に、任意の行列に対して $A^0 = E$ (E は単位行列) と定める。

行列 A に対して、ある自然数 $k > 0$ が存在して $A^k = O$(O は零行列) である時、この行列 A は、冪 (巾) 零行列と呼ぶ。また、冪零行列 A に対して、k より小さい数では、O にならないが、k で初めて、O になる時、この k を冪零行列 A の次数と呼ぶことにする。

問題 211

行列 A, B が共に冪零行列で、その次数が、それぞれ k, j とし、$AB = BA$ を満す時、次の問に答えなさい。

1. 二つの行列の積 AB が冪零行列であることを示し、その次数の最大値を k, j で表しなさい。
2. 二つの行列の和 $A + B$ が冪零行列であることを示し、その次数の最大値を k, j で表しなさい。

問題 212 A が冪零行列の時、e^A を次のように定義する[5]。

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

この時、次の問に答えなさい。

1. $e^O = E$ であることを示しなさい。ただし、O, E はそれぞれ、零行列、単位行列とする。
2. e^A と e^B の積 $e^A e^B$ が $e^{(A+B)}$ になることを示しなさい。
3. e^A は正則であることを示しなさい。

問題 213 次のような n 次の正方行列 $J_n = \{\delta_{i,i-1}\}$ が冪零行列であることを示し、その次数を求めなさい。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[対称行列と交代行列]

n 次行列 A が $A = {}^t A$ をみたすとき A を対称行列といい、$A = -{}^t A$ をみたすとき A を交代行列という。

問題 214 行列 A が交代行列ならば、A の対角要素は 0 であることを示せ。

---

[5]形式的には無限和だが、A が冪零なので、実質は有限和であることに注意

問題 215 　行列 A が、対称行列かつ交代行列ならば、実は、A は、零行列 O であること示せ。

問題 216

1. 対称行列 A, B の和 $A+B$ も対称行列になることを示しなさい。
2. 交代行列 C, D の和 $C+D$ も交代行列になることを示しなさい。
3. 交代行列 C の二乗 C^2 は、対称行列になることを示しなさい。

問題 217

1. n 次行列 B の (i,j) 成分を b_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ とする。この時、次の行列の (i,j) 成分を求めよ。

$$1.\quad {}^tB,\quad 2.\quad B+{}^tB,\quad 3.\quad B-{}^tB.$$

2. n 次行列 B が与えられたとき $B+{}^tB$ は対称行列であることを示せ。また $B-{}^tB$ は交代行列であることを示せ。

問題 218 　正方行列 A は、対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを示せ。

問題 219 　行列 A が冪零行列ならば、$|A|=0$ を示せ。

問題 220 　演習書の p.13 の 1 章の類題 7 を解きなさい。

問題 221 　演習書の p.13 の 1 章の類題 8 を解きなさい。

問題 222 　次の基本行列の行列式を求めなさい。

$$1.\quad P_n(i,j),\quad 2.\quad Q_n(i;c),\quad 3.\quad R_n(i,j,c).$$

問題 223 　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.3 を解きなさい。

問題 224 　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.4 を解きなさい。

問題 225 　正則行列は基本行列の積で表すことができることと，$|AB|=|A||B|$ を用いて正則行列の行列式は 0 ではないことを示せ。

問題 226 　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.5 を解きなさい。

問題 227 　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.6 を解きなさい。

問題 228　実行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ に対し、つぎの行列式を求めよ。

1. $\det X$,　2. $\det(E - X)$.

問題 229　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.8 を解きなさい。

問題 230　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.10 を解きなさい。

問題 231　次の行列式を因数分解せよ。

$$1.\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix},\quad 2.\quad \begin{vmatrix} x & i & 1 & -i \\ -i & x & i & 1 \\ 1 & -i & x & i \\ i & 1 & -i & x \end{vmatrix}$$

問題 232　演習書の p.75 の 5 章の類題 4 を解きなさい。

問題 233　演習書の p.76 の 5 章の類題 5 を解きなさい。

問題 234　次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} na_1+b_1 & na_2+b_2 & na_3+b_3 \\ nb_1+c_1 & nb_2+c_2 & nb_3+c_3 \\ nc_1+a_1 & nc_2+a_2 & nc_3+a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2-n+1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

問題 235　演習書の p.78 の 5 章の類題 6 を解きなさい。

問題 236　演習書の p.80 の 5 章の類題 7 を解きなさい。

問題 237　次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

問題 238

1. A が直交行列ならば $\det A = \pm 1$ であることを示せ。

2. A がエルミート行列ならば $\det A$ は実数であることを示せ。

3. A がユニタリ行列ならば $\det A$ は絶対値が 1 の複素数であることを示せ。

問題 239　$\det {}^tA = A$ と $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ を用いて $\det A^* = \overline{\det A}$ を証明せよ。

問題 240　A を 3 次行列とする。このとき次の行列の行列式の値を $|A|$ を用いて表わせ。

$$1.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad 2.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3.\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}A,\quad 4.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$5.\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 241　冪零行列[6] は正則でないことを示せ。(ヒント：A が正則ならば $|A| \neq 0$ であることと、$|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 242　演習書の p.83 の 5 章の問題 5.1 を解きなさい。

問題 243　演習書の p.83 の 5 章の問題 5.2 を解きなさい。

問題 244　直交行列[7]A の行列式 $|A|$ の値を求めよ。(ヒント：$|E| = 1$, $|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 245　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.9 を解きなさい。

問題 246　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.10 を解きなさい。

---

[6] A が冪零行列であることの定義は、ある自然数 n が存在し、$A^n = O$ (ただし、O は零行列) となることである。

[7] A が直交行列であることの定義は、${}^tAA = E$ となることである。

問題 247　二つの多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, g(x) = px^2 + qx + r$ に対して、次の行列式 $R(f, g)$ をこの二つの多項式の終結式と呼ぶ。

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}$$

この時、「二つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が同じ根を持つこと」と、「$R(f, g) = 0$ が成立すること」が必要十分条件になっていることを示せ。

問題 248　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.11 を解きなさい。

問題 249　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.12 を解きなさい。

問題 250　次の行列式を因数分解しなさい。

1.

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

問題 251　演習書の p.83 の 5 章の問題 5.3 を解きなさい。

問題 252　演習書の p.84 の 5 章の問題 5.4 を解きなさい。

問題 253　演習書の p.84 の 5 章の問題 5.5 を解きなさい。

問題 254　演習書の p.84 の 5 章の問題 5.6 を解きなさい。

問題 255　演習書の p.84 の 5 章の問題 5.7 を解きなさい。

問題 256　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.8 を解きなさい。

問題 257　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.13 を解きなさい。

問題 258　$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in \boldsymbol{K}^5$ が

$$(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{v}_4)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を満たしているとする。
このとき $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の線型結合で表せ。

問題 259　$(4, 3)$ 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ に $(5, 4)$ 行列 B を左からかけたところ

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となったとする。
$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は線型独立であることを示せ。

問題 260　次の各々の場合に $A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_n$ を計算し、その結果を用いて $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が線型独立であることを示せ。

1. $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

2. $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

問題 261　$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ を n 次元数ベクトルとする。$A = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{v}_4)$ に行に関する基本変形を施していったところ $(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_4)$ という行列になったとする。
$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は線型独立であることを示せ。

問題 262　次に示すのは行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に行に関する基本変形を施していったようすである。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ。

1. それぞれどのような基本変形を行なったかを述べよ。
2. 以下の文が正しくなるように，｛左，右｝のいずれか一方を選び，$\boxed{}$ に具体的な行列をいれよ。
   (a) 2 番目の行列を得るには A の｛左，右｝から，基本行列 $\boxed{}$ をかければよい。
   (b) 4 番目の行列を得るには A の｛左，右｝から，正則行列 $\boxed{}$ をかければよい。
   (c) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得るには，最後の行列の｛左，右｝から，正則行列 $\boxed{}$ をかければよい。
3. A の列を左から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ とするとき，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は線型独立であることを示せ。
4. A の列を左から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ とするとき，$\boldsymbol{v}_3$ と $\boldsymbol{v}_4$ は $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線型結合で表すことができることを示せ。

問題 263

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6)$ としたとき次の問に答えよ。

1. $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ は線型独立である。
2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6$ を $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ の線型結合で表わせ。

問題 264　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5)$ に左から正則行列 P をかけたところ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ という形になった。

次の問に答えよ。

1. $P\boldsymbol{a}_1$, $P\boldsymbol{a}_2$, $P(2\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5)$ を求めよ。
2. $\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{a}_1$ を示せ。
3. $\boldsymbol{a}_5$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の線型結合で表せ。
4. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は線型独立であることを示せ。
5. $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ は線型独立であることを示せ。

問題 265　補題 3.8.1 を用いて次のことを証明せよ。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \boldsymbol{K}^n$ が線型独立ならば，任意に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r \in \boldsymbol{K}^m$ をとってきたときに，$A\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1$, $A\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2$, …, $A\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{b}_r$ となるような (m, n) 行列 A が存在する。

問題 266　系 3.8.1 を用いて，n 次行列 A に対し，n 次行列 B が存在して $AB = E$ となるならば，A は正則行列であることを示せ。

問題 267　次のベクトルの組が線型独立かどうかを判定せよ。もし，線型従属の場合は $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ となるどれかひとつは 0 でないような $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \boldsymbol{K}$ を求めよ。

1. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

問題 268　A を $(3,4)$-行列とする。
A は正則行列 $P = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)$, $Q = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3\ \boldsymbol{u}_4)$ （$\boldsymbol{v}_i \in \boldsymbol{K}^3$ $(1 \leqq i \leqq 3)$, $\boldsymbol{u}_j \in \boldsymbol{K}^4$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ ）を用いて，

$$P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と階数標準形になるとする。(P ではなく P^{-1} であることに注意。)
このとき，次に答えよ。

1. $A\boldsymbol{u}_1$, $A\boldsymbol{u}_2$, $A\boldsymbol{u}_3$, $A\boldsymbol{u}_4$ を求めよ。

2. $A(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 + c_4\boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{0}$ ならば $c_1 = c_2 = 0$ であることを示せ。

3. $A(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 + c_4\boldsymbol{u}_4) = d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + d_3\boldsymbol{v}_3$ ならば $d_3 = 0$ であることを示せ。

問題 269　次の集合は ( ) 内に書いてある数ベクトル空間の部分集合とみたとき部分空間であることを示せ。

1. 適当な $s, t, u \in \boldsymbol{K}$ を用いて $\begin{pmatrix} 2s - t \\ t + u \\ 0 \end{pmatrix}$ と書けるベクトル全体の集合 V $(\boldsymbol{K}^3)$。

2. 適当な t を用いて $\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ と書けるベクトル全体の集合 V　$(\boldsymbol{K}^3)$。

3.

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 3x_1 + 2x_2 = 0 \} \ (\boldsymbol{K}^2).$$

4.

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid -x_1 + 2x_3 = 0 \} \ (\boldsymbol{K}^3).$$

5.

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 + 2x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \} \ (\boldsymbol{K}^4).$$

6.

$$V = \{\mathbf{0}\} \ (\boldsymbol{K}^n).$$

7.

$$V = \boldsymbol{K}^n \ (\boldsymbol{K}^n).$$

問題 270　次の集合は ( ) 内の数ベクトル空間の部分集合とみたとき部分空間ではないことを示せ。

1. 適当な $s, t \in \boldsymbol{K}$ を用いて $\begin{pmatrix} 2s - t + 1 \\ t - 1 \\ -s + 2 \end{pmatrix}$ と書けるベクトル全体の集合 V $(\boldsymbol{K}^3)$。

2.

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \} \ (\boldsymbol{K}^3).$$

3.

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \geqq 0 \} \ (\boldsymbol{R}^2).$$

4.

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R} \} \ (\boldsymbol{C}^3).$$

問題 271　A を (m, n) 行列とする。

1.

$$U = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \ \text{となる}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n\ \text{が存在する。}\}$$

は $\boldsymbol{K}^m$ の部分空間であることを示せ。

2.

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

は $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間であることを示せ。

問題 272　V_1 と V_2 を $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間とする。このとき，$V_1 \cap V_2$ も $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間であることを示せ。

問題 273

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6)$ とし，V を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_6$ が生成する $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間とする。

1. V は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の生成する部分空間と一致することを示せ。
   ただし，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ は $\boldsymbol{K}^4$ の標準基底とする。
2. $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ は V の基底であることを示せ。

問題 274　次のベクトルからなる集合の極大線型独立系を一組求めよ。また，残りのベクトルをそれらの線型結合で表せ。

1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

問題 275　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \boldsymbol{K}^n$ は線型独立であるとする。$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \in \boldsymbol{K}^n$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の線型結合として次のように表わされるとき次の問に答えよ。

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 = -2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{cases}$$

1. 行列 A, B を $A = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$, $B = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)$ と定める。このとき上の関係を行列の積を用いて表わすとど うなるか。
2. 行列 B の階数はいくつか。
3. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が線型独立であることを示せ。

問題 276　行列 $A, B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n), C = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\ \cdots\ \boldsymbol{c}_n)$ が $C = AB$ をみたすとする。

1. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ を $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ の極大線型独立系とすると，
   $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ は $A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_r$ の線型結合で表すことができることを示せ。

2. $\mathrm{rank}\ C \leqq \mathrm{rank}\ B$ であることを示せ。

問題 277　　A を (m, n) 行列とする。

1. $\mathrm{rank}\ A \leqq n$ となることを示せ。

2. $\mathrm{rank}\ A \leqq m$ となることを示せ。

問題 278　　$m < n$ とする。このとき (m, n) 行列 A と (n, m) 行列 B をどのように与えても，m 次行列 AB は正則行列にはならないことを示せ。

問題 279　　次の行列の階数が a, b の値によりどのようになるかを調べよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & a \\ 2 & 3 & b \end{pmatrix}.$$

問題 280　　次のベクトルの組は $\boldsymbol{K}^3$ の基底ではないことがただちにわかる。その理由を簡単に説明せよ。

1.
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

問題 281　　次のベクトルが生成する部分空間の基底と次元を求めよ。

1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

問題 282　次のベクトルの組が $\boldsymbol{K}^3$ の基底にならないように定数 b の値を定めさらに $\boldsymbol{v}_3$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線型結合で表せ。

1. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}.$　2. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}.$

問題 283　次のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の基底であることを示し，$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線型結合で表せ。

1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

問題 284　次の各行列を A とするとき、部分空間 $V = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底と次元を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,　5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

問題 285　次のベクトルからなる集合の極大線型独立系を一組求めよ。また，残りのベクトルをそれらの線型結合で表せ。

1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

問題 286 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \boldsymbol{K}^n$ は線型独立であるとする。$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \in \boldsymbol{K}^n$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の線型結合として次のように表わされるとき次の問に答えよ。

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} \boldsymbol{u}_1 & = & \boldsymbol{v}_1 & -\boldsymbol{v}_2 & +2\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 & = & 2\boldsymbol{v}_1 & -3\boldsymbol{v}_2 & +2\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 & = & -2\boldsymbol{v}_1 & +\boldsymbol{v}_2 & \end{array} \right.$$

1. 行列 A, B を $A = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$, $B = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)$ と定める。このとき上の関係を行列の積を用いて表わすとど うなるか。
2. 行列 B の階数はいくつか。
3. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が線型独立であることを示せ。

問題 287 行列 $A, B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n), C = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\ \cdots\ \boldsymbol{c}_n)$ が $C = AB$ をみたすとする。

1. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ を $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ の極大線型独立系とすると，
$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ は $A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_r$ の線型結合で表すことができることを示せ。

2. $\mathrm{rank}\ C \leq \mathrm{rank}\ B$ であることを示せ。

問題 288　　A を (m, n) 行列とする。

1. $\mathrm{rank}\ A \leq n$ となることを示せ。

2. $\mathrm{rank}\ A \leq m$ となることを示せ。

問題 289　　$m < n$ とする。このとき (m, n) 行列 A と (n, m) 行列 B をどのように与えても，m 次行列 AB は正則行列にはならないことを示せ。

問題 290　　次の行列の階数が a, b の値によりどのようになるかを調べよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & a \\ 2 & 3 & b \end{pmatrix}.$$

問題 291　　次のベクトルの組は $\boldsymbol{K}^3$ の基底ではないことがただちにわかる。その理由を簡単に説明せよ。

1.
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

問題 292　　次のベクトルが生成する部分空間の基底と次元を求めよ。

1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

問題 293　次のベクトルの組が $\boldsymbol{K}^3$ の基底にならないように定数 b の値を定めさらに $\boldsymbol{v}_3$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線型結合で表せ。

1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}.$$

2.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}.$$

問題 294　次のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の基底であることを示し，$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線型結合で表せ。

1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

問題 295　次の各行列を A とするとき、部分空間 $V = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底と次元を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,　5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

問題 296　次の行列の階数 (rank) を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,　5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$,　6. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,　8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,　9. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 297　次のベクトルの組が線型独立かどうかを判定せよ。もし，線型従属の場合は $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ となるどれかひとつは 0 でないような $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \boldsymbol{K}$ を求めよ。

1. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

問題 298　次のベクトルからなる集合の極大線型独立系を一組求めよ。また，残りのベクトルをそれらの線型結合で表せ。

1.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

4.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

問題 299　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \boldsymbol{K}^n$ は線型独立であるとする。$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \in \boldsymbol{K}^n$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の線型結合として次のように表わされるとき次の問に答えよ。

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 &= & \boldsymbol{v}_1 & -\boldsymbol{v}_2 & +2\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 &= & 2\boldsymbol{v}_1 & -3\boldsymbol{v}_2 & +2\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 &= & -2\boldsymbol{v}_1 & +\boldsymbol{v}_2 & \end{cases}$$

1. 行列 A, B を $A = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$, $B = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)$ と定める。このとき上の関係を行列の積を用いて表わすとどうなるか。
2. 行列 B の階数はいくつか。
3. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が線型独立であることを示せ。

問題 300　行列 $A, B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n), C = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\ \cdots\ \boldsymbol{c}_n)$ が $C = AB$ をみたすとする。

1. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ を $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ の極大線型独立系とすると，
   $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ は $A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_r$ の線型結合で表すことができることを示せ。
2. $\mathrm{rank}\ C \leq \mathrm{rank}\ B$ であることを示せ。

問題 301　A を (m, n) 行列とする。

1. $\mathrm{rank}\ A \leq n$ となることを示せ。
2. $\mathrm{rank}\ A \leq m$ となることを示せ。

問題 302　$m < n$ とする。このとき (m, n) 行列 A と (n, m) 行列 B をどのように与えても，m 次行列 AB は正則行列にはならないことを示せ。

問題 303　次の行列の階数が a, b の値によりどのようになるかを調べよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & a \\ 2 & 3 & b \end{pmatrix}.$$

問題 304　次の集合は ( ) 内に書いてある数ベクトル空間の部分集合とみたとき部分空間であることを示せ。

1. 適当な $s, t, u \in \boldsymbol{K}$ を用いて $\begin{pmatrix} 2s - t \\ t + u \\ 0 \end{pmatrix}$ と書けるベクトル全体の集合 V $(\boldsymbol{K}^3)$。

2. 適当な t を用いて $\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ と書けるベクトル全体の集合 V $(\boldsymbol{K}^3)$。

3.

$$V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 3x_1 + 2x_2 = 0\} \ (\boldsymbol{K}^2).$$

4.

$$V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid -x_1 + 2x_3 = 0\} \ (\boldsymbol{K}^3).$$

5.

$$V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 + 2x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \} \ (\boldsymbol{K}^4).$$

6.

$$V = \{\mathbf{0}\} \ (\boldsymbol{K}^n).$$

7.

$$V = \boldsymbol{K}^n \ (\boldsymbol{K}^n).$$

問題 305　　次の集合は ( ) 内の数ベクトル空間の部分集合とみたとき部分空間ではないことを示せ。

1. 適当な $s, t \in \boldsymbol{K}$ を用いて $\begin{pmatrix} 2s - t + 1 \\ t - 1 \\ -s + 2 \end{pmatrix}$ と書けるベクトル全体の集合 V $(\boldsymbol{K}^3)$。

2.

$$V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 1\} \ (\boldsymbol{K}^3).$$

3.

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \geqq 0 \} \ (\boldsymbol{R}^2).$$

4.

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R} \} \ (\boldsymbol{C}^3).$$

問題 306　A を (m,n) 行列とする。

1.

$$U = \{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \ \text{となる}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \ \text{が存在する。}\}$$

は $\boldsymbol{K}^m$ の部分空間であることを示せ。

2.

$$V = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \}$$

は $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間であることを示せ。

問題 307　V_1 と V_2 を $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間とする。このとき，$V_1 \cap V_2$ も $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間であることを示せ。

問題 308

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_3 \ \boldsymbol{a}_4 \ \boldsymbol{a}_5 \ \boldsymbol{a}_6)$ とし，V を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_6$ が生成する $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間とする。

1. V は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の生成する部分空間と一致することを示せ。
   ただし，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ は $\boldsymbol{K}^4$ の標準基底とする。
2. $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ は V の基底であることを示せ。

問題 309　次の行列を係数行列とする連立斉次一次方程式を解け。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,　5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,　6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,　8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,　9. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$,

10. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,　12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$,

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,　14. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

問題 310　次の各行列を A とするとき、部分空間 $V = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底と次元を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,　5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

問題 311　次の連立斉次一次方程式の解空間の次元が a, b の値によってどのように変化するかを調べよ。

1. $\begin{pmatrix} 2 & a-5 \\ a & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,　2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & a \\ a & b \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

問題 312　次の連立一次方程式の一般解を求めよ。

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$ 2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$ 4. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

5. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$ 6. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix},$$

7. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

8. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

9. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$ 10. $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

11. $$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

12. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問題 313 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & -8 & 5 \\ 1 & -4 & -11 & 13 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とする。

このとき次の 3 つの連立一次方程式を解け。

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

問題 314 次の連立一次方程式が解を持つように定数 a, b の値を定め、そのときの一般解を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

問題 315 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が張る $\boldsymbol{K}^3$ の部分空間を V とする。

次のベクトルが V に属するかどうかを調べ属する場合にはそれを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線型結合で表わせ。

$$1. \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ 2. \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ 3. \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

問題 316 次の連立一次方程式が複数の解を持つように定数 a, b, c, d の値を定め、そのときの一般解を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

問題 317 次のベクトルの組は $\boldsymbol{K}^3$ の基底ではないことがただちにわかる。その理由を簡単に説明せよ。

1.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

問題 318　次のベクトルが生成する部分空間の基底と次元を求めよ。

1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

問題 319　次のベクトルの組が $\boldsymbol{K}^3$ の基底にならないように定数 b の値を定めさらに $\boldsymbol{v}_3$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線型結合で表せ。

1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}.$$

2.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}.$$

問題 320　次のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の基底であることを示し，$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線型結合で表せ。

1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

問題 321　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$ とする。次を示せ。

1. $|c\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = c|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3|$
2. $|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = -|\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3|$
3. $|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| + |\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3|$

問題 322　次の性質は直接成分を用いて計算しても示すこともできるが、上の問で示した行列式の性質から導くこともできる。実際に 1. 2. 3. の性質のみを用いて証明せよ。

1. $|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3| = 0$
2. $|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{a}_3| = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| + |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{a}_3|$
3. $|\boldsymbol{a}_1 + c\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3|$

問題 323　$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2$ とする。

$$|\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = x_1|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3|$$

$$|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_3| = x_2|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3|$$

を示せ。

問題 324　次の行列式の値を求めよ。ただし i は虚数単位である。

$$1.\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad 2.\ \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix},$$

$$3.\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 4.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

5. $\begin{vmatrix} 1+i & 0 & 1-i \\ 0 & i & 2 \\ 1+i & 2 & 2-i \end{vmatrix}$, 6. $\begin{vmatrix} x & i & 1 \\ -i & x & i \\ 1 & -i & x \end{vmatrix}$,

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, 8. $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ c & b & x+a \end{vmatrix}$.

問題 325 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \boldsymbol{K}^3$ とする。$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \in \boldsymbol{K}^3$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の線型結合として次のように表わされるとき次の問に答えよ。

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 = -2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{cases}$$

1. 3 次行列 A, B を $A = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$, $B = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)$ と定める。このとき上の関係を行列の積を用いて表わすと、$A = \boxed{}$ となる。($\boxed{}$ にあてはまる適当な式を求めよ。)
2. $|A|$ を $|B|$ を用いて表せ。

問題 326 次の行列の行列式の値を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問題 327 次の行列を A とする。

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1. A の $(2,3)$ 小行列式を求めよ。

2. A の $(3,1)$ 小行列式を求めよ。

3. A の $(1,2)$ 余因子を求めよ。

4. A の余因子行列を求めよ。

5. A の逆行列を求めよ。

問題 328　次の行列式を括弧内に示した行または列について展開せよ。

1. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, (2 列),

2. $\begin{vmatrix} 1 & -b & -c & -d \\ 0 & a & -d & c \\ 0 & d & a & -b \\ 0 & -c & b & a \end{vmatrix}$, (1 列)

3. $\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (4 行)

問題 329　次の行列式の値を求めよ。

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$,　2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$,