

問題 1

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1; \frac{1}{3})$ ; 1 行目を  $\frac{1}{3}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(2,1;-1)$ ; 2 行目に 1 行目を  $-1$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

右  $P(1,2;-\frac{7}{3})$ ; 1 列目に 2 列目を  $-\frac{7}{3}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $Q(2; \frac{3}{2})$ ; 2 行目を  $\frac{3}{2}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(3,2;-1)$ ; 3 行目に 2 行目を  $-1$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

問題 2

$$\begin{pmatrix} 123 & 0 & 16 & 111 \\ 38 & 0 & 5 & 34 \\ 183 & 0 & 24 & 165 \\ 9 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1; \frac{1}{123}); 1$  行目を  $\frac{1}{123}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{123} & \frac{37}{41} \\ 38 & 0 & 5 & 34 \\ 183 & 0 & 24 & 165 \\ 9 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

左  $P(2,1;-38); 2$  行目に  $1$  行目を  $-38$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{123} & \frac{37}{41} \\ 0 & 0 & \frac{7}{123} & -\frac{12}{41} \\ 183 & 0 & 24 & 165 \\ 9 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

左  $P(3,1;-183); 3$  行目に  $1$  行目を  $-183$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{123} & \frac{37}{41} \\ 0 & 0 & \frac{7}{123} & -\frac{12}{41} \\ 0 & 0 & \frac{8}{41} & -\frac{6}{41} \\ 9 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

左  $P(4,1;-9); 4$  行目に  $1$  行目を  $-9$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{123} & \frac{37}{41} \\ 0 & 0 & \frac{7}{123} & -\frac{12}{41} \\ 0 & 0 & \frac{8}{41} & -\frac{6}{41} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{41} & -\frac{5}{41} \end{pmatrix}$$

右  $P(1,3;-\frac{16}{123}); 1$  列目に  $3$  列目を  $-\frac{16}{123}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{41} \\ 0 & 0 & \frac{7}{123} & -\frac{12}{41} \\ 0 & 0 & \frac{8}{41} & -\frac{6}{41} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{41} & -\frac{5}{41} \end{pmatrix}$$

右  $P(1,4;-\frac{37}{41}); 1$  列目に  $4$  列目を  $-\frac{37}{41}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{123} & -\frac{12}{41} \\ 0 & 0 & \frac{8}{41} & -\frac{6}{41} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{41} & -\frac{5}{41} \end{pmatrix}$$

右 P(2,3);2列目と3列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{123} & 0 & -\frac{12}{41} \\ 0 & \frac{8}{41} & 0 & -\frac{6}{41} \\ 0 & -\frac{7}{41} & 0 & -\frac{5}{41} \end{pmatrix}$$

左 Q(2;  $\frac{123}{7}$ );2行目を  $\frac{123}{7}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{36}{7} \\ 0 & \frac{8}{41} & 0 & -\frac{6}{41} \\ 0 & -\frac{7}{41} & 0 & -\frac{5}{41} \end{pmatrix}$$

左 P(3,2;  $-\frac{8}{41}$ );3行目に2行目を  $-\frac{8}{41}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{36}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{7}{41} & 0 & -\frac{5}{41} \end{pmatrix}$$

左 P(4,2;  $\frac{7}{41}$ );4行目に2行目を  $\frac{7}{41}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{36}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

右 P(2,4;  $\frac{36}{7}$ );2列目に4列目を  $\frac{36}{7}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

右 P(3,4);3列目と4列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $Q(3; \frac{7}{6})$ ; 3行目を  $\frac{7}{6}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(4,3;1)$ ; 4行目に 3行目を 1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

### 問題 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 31 & 0 & 37 \\ 0 & 26 & 0 & 36 \\ 0 & 11 & 0 & 12 \\ 0 & 22 & 0 & 29 \\ 0 & 48 & 0 & 59 \end{pmatrix}$$

右  $P(1,2)$ ; 1列目と 2列目を交換

$$\begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 & 37 \\ 26 & 0 & 0 & 36 \\ 11 & 0 & 0 & 12 \\ 22 & 0 & 0 & 29 \\ 48 & 0 & 0 & 59 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1; \frac{1}{31})$ ; 1行目を  $\frac{1}{31}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{31} \\ 26 & 0 & 0 & 36 \\ 11 & 0 & 0 & 12 \\ 22 & 0 & 0 & 29 \\ 48 & 0 & 0 & 59 \end{pmatrix}$$

左  $P(2,1;-26)$ ; 2行目に 1行目を  $-26$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{154}{31} \\ 11 & 0 & 0 & 12 \\ 22 & 0 & 0 & 29 \\ 48 & 0 & 0 & 59 \end{pmatrix}$$

左 P(3,1;-11);3行目に1行目を-11倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{154}{31} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{35}{31} \\ 22 & 0 & 0 & 29 \\ 48 & 0 & 0 & 59 \end{pmatrix}$$

左 P(4,1;-22);4行目に1行目を-22倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{154}{31} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{35}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{85}{31} \\ 48 & 0 & 0 & 59 \end{pmatrix}$$

左 P(5,1;-48);5行目に1行目を-48倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{154}{31} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{35}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{85}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{53}{31} \end{pmatrix}$$

右 P(1,4;-\frac{37}{31});1列目に4列目を-\frac{37}{31}倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{154}{31} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{35}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{85}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{53}{31} \end{pmatrix}$$

右 P(2,4);2列目と4列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{154}{31} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{35}{31} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{85}{31} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{53}{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $Q(2; \frac{31}{154})$ ; 2行目を  $\frac{31}{154}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{35}{31} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{85}{31} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{53}{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(3, 2; \frac{35}{31})$ ; 3行目に2行目を  $\frac{35}{31}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{85}{31} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{53}{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(4, 2; -\frac{85}{31})$ ; 4行目に2行目を  $-\frac{85}{31}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{53}{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(5, 2; -\frac{53}{31})$ ; 5行目に2行目を  $-\frac{53}{31}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

問題 4

$$\begin{pmatrix} 111 & 57 & 0 & 656 \\ 54 & 28 & 0 & 319 \\ 41 & 21 & 0 & 242 \\ 113 & 58 & 0 & 670 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1; \frac{1}{111})$ ; 1 行目を  $\frac{1}{111}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{656}{111} \\ 54 & 28 & 0 & 319 \\ 41 & 21 & 0 & 242 \\ 113 & 58 & 0 & 670 \end{pmatrix}$$

左  $P(2,1; -54)$ ; 2 行目に 1 行目を  $-54$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{656}{111} \\ 0 & \frac{10}{37} & 0 & -\frac{5}{37} \\ 41 & 21 & 0 & 242 \\ 113 & 58 & 0 & 670 \end{pmatrix}$$

左  $P(3,1; -41)$ ; 3 行目に 1 行目を  $-41$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{656}{111} \\ 0 & \frac{10}{37} & 0 & -\frac{5}{37} \\ 0 & -\frac{2}{37} & 0 & -\frac{34}{111} \\ 113 & 58 & 0 & 670 \end{pmatrix}$$

左  $P(4,1; -113)$ ; 4 行目に 1 行目を  $-113$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{656}{111} \\ 0 & \frac{10}{37} & 0 & -\frac{5}{37} \\ 0 & -\frac{2}{37} & 0 & -\frac{34}{111} \\ 0 & -\frac{1}{37} & 0 & \frac{242}{111} \end{pmatrix}$$

右  $P(1,2; -\frac{19}{37})$ ; 1 列目に 2 列目を  $-\frac{19}{37}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{656}{111} \\ 0 & \frac{10}{37} & 0 & -\frac{5}{37} \\ 0 & -\frac{2}{37} & 0 & -\frac{34}{111} \\ 0 & -\frac{1}{37} & 0 & \frac{242}{111} \end{pmatrix}$$

右  $P(1,4; -\frac{656}{111})$ ; 1 列目に 4 列目を  $-\frac{656}{111}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{37} & 0 & -\frac{5}{37} \\ 0 & -\frac{2}{37} & 0 & -\frac{34}{111} \\ 0 & -\frac{1}{37} & 0 & \frac{242}{111} \end{pmatrix}$$

左  $Q(2, \frac{37}{10})$ ; 2行目を  $\frac{37}{10}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{37} & 0 & -\frac{34}{111} \\ 0 & -\frac{1}{37} & 0 & \frac{242}{111} \end{pmatrix}$$

左  $P(3, 2; \frac{2}{37})$ ; 3行目に 2行目を  $\frac{2}{37}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{37} & 0 & \frac{242}{111} \end{pmatrix}$$

左  $P(4, 2; \frac{1}{37})$ ; 4行目に 2行目を  $\frac{1}{37}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

右  $P(2, 4; \frac{1}{2})$ ; 2列目に 4列目を  $\frac{1}{2}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

右  $P(3, 4)$ ; 3列目と 4列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

左  $Q(3; -3)$ ; 3行目を  $-3$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} & 0 \end{pmatrix}$$



左  $P(4,3;-\frac{13}{6})$ ;4行目に3行目を  $-\frac{13}{6}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

問題 5

$$\begin{pmatrix} 360 & 135 & 284 & 138 & 119 \\ 427 & 160 & 337 & 164 & 141 \\ 339 & 127 & 267 & 129 & 112 \\ 155 & 58 & 122 & 59 & 51 \\ 206 & 77 & 162 & 78 & 68 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1;\frac{1}{360})$ ;1行目を  $\frac{1}{360}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{71}{90} & \frac{23}{60} & \frac{119}{360} \\ 427 & 160 & 337 & 164 & 141 \\ 339 & 127 & 267 & 129 & 112 \\ 155 & 58 & 122 & 59 & 51 \\ 206 & 77 & 162 & 78 & 68 \end{pmatrix}$$

左  $P(2,1;-427)$ ;2行目に1行目を  $-427$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{71}{90} & \frac{23}{60} & \frac{119}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{90} & \frac{19}{60} & -\frac{53}{360} \\ 339 & 127 & 267 & 129 & 112 \\ 155 & 58 & 122 & 59 & 51 \\ 206 & 77 & 162 & 78 & 68 \end{pmatrix}$$

左  $P(3,1;-339)$ ;3行目に1行目を  $-339$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{71}{90} & \frac{23}{60} & \frac{119}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{90} & \frac{19}{60} & -\frac{53}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{30} & -\frac{19}{20} & -\frac{7}{120} \\ 155 & 58 & 122 & 59 & 51 \\ 206 & 77 & 162 & 78 & 68 \end{pmatrix}$$

左  $P(4,1;-155)$ ;4 行目に 1 行目を  $-155$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{71}{90} & \frac{23}{60} & \frac{119}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{90} & \frac{19}{60} & -\frac{53}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{30} & -\frac{19}{20} & -\frac{7}{120} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{12} & -\frac{17}{72} \\ 206 & 77 & 162 & 78 & 68 \end{pmatrix}$$

左  $P(5,1;-206)$ ;5 行目に 1 行目を  $-206$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{71}{90} & \frac{23}{60} & \frac{119}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{90} & \frac{19}{60} & -\frac{53}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{30} & -\frac{19}{20} & -\frac{7}{120} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{12} & -\frac{17}{72} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{23}{45} & -\frac{29}{30} & -\frac{17}{180} \end{pmatrix}$$

右  $P(1,2;-\frac{3}{8})$ ;1 列目に 2 列目を  $-\frac{3}{8}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{71}{90} & \frac{23}{60} & \frac{119}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{90} & \frac{19}{60} & -\frac{53}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{30} & -\frac{19}{20} & -\frac{7}{120} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{12} & -\frac{17}{72} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{23}{45} & -\frac{29}{30} & -\frac{17}{180} \end{pmatrix}$$

右  $P(1,3;-\frac{71}{90})$ ;1 列目に 3 列目を  $-\frac{71}{90}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{60} & \frac{119}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{90} & \frac{19}{60} & -\frac{53}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{30} & -\frac{19}{20} & -\frac{7}{120} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{12} & -\frac{17}{72} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{23}{45} & -\frac{29}{30} & -\frac{17}{180} \end{pmatrix}$$

右  $P(1,4;-\frac{23}{60})$ ;1 列目に 4 列目を  $-\frac{23}{60}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{119}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{90} & \frac{19}{60} & -\frac{53}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{30} & -\frac{19}{20} & -\frac{7}{120} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{12} & -\frac{17}{72} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{23}{45} & -\frac{29}{30} & -\frac{17}{180} \end{pmatrix}$$

右 P(1,5;  $-\frac{119}{360}$ ); 1 列目に 5 列目を  $-\frac{119}{360}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{90} & \frac{19}{60} & -\frac{53}{360} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{30} & -\frac{19}{20} & -\frac{7}{120} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{12} & -\frac{17}{72} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{23}{45} & -\frac{29}{30} & -\frac{17}{180} \end{pmatrix}$$

左 Q(2;-8); 2 行目を  $-8$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{52}{45} & -\frac{38}{15} & \frac{53}{45} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{30} & -\frac{19}{20} & -\frac{7}{120} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{12} & -\frac{17}{72} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{23}{45} & -\frac{29}{30} & -\frac{17}{180} \end{pmatrix}$$

左 P(3,2;  $\frac{1}{8}$ ); 3 行目に 2 行目を  $\frac{1}{8}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{52}{45} & -\frac{38}{15} & \frac{53}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{45} & -\frac{19}{15} & \frac{4}{45} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{12} & -\frac{17}{72} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{23}{45} & -\frac{29}{30} & -\frac{17}{180} \end{pmatrix}$$

左 P(4,2;  $\frac{1}{8}$ ); 4 行目に 2 行目を  $\frac{1}{8}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{52}{45} & -\frac{38}{15} & \frac{53}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{45} & -\frac{19}{15} & \frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{45} & -\frac{11}{15} & -\frac{4}{45} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{23}{45} & -\frac{29}{30} & -\frac{17}{180} \end{pmatrix}$$

左 P(5,2;  $\frac{1}{4}$ ); 5 行目に 2 行目を  $\frac{1}{4}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{52}{45} & -\frac{38}{15} & \frac{53}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{45} & -\frac{19}{15} & \frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{45} & -\frac{11}{15} & -\frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

右 P(2,3; $\frac{52}{45}$ );2 列目に 3 列目を  $\frac{52}{45}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{38}{15} & \frac{53}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{45} & -\frac{19}{15} & \frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{45} & -\frac{11}{15} & -\frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

右 P(2,4; $\frac{38}{15}$ );2 列目に 4 列目を  $\frac{38}{15}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{53}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{45} & -\frac{19}{15} & \frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{45} & -\frac{11}{15} & -\frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

右 P(2,5; $-\frac{53}{45}$ );2 列目に 5 列目を  $-\frac{53}{45}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{26}{45} & -\frac{19}{15} & \frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{45} & -\frac{11}{15} & -\frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

左 Q(3; $-\frac{45}{26}$ );3 行目を  $-\frac{45}{26}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{57}{26} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{45} & -\frac{11}{15} & -\frac{4}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

左 P(4,3; $\frac{19}{45}$ );4 行目に 3 行目を  $\frac{19}{45}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{57}{26} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{26} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

左  $P(5,3;\frac{4}{5})$ ;5行目に3行目を  $\frac{4}{5}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{57}{26} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{26} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

右  $P(3,4;-\frac{57}{26})$ ;3列目に4列目を  $-\frac{57}{26}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{26} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

右  $P(3,5;\frac{2}{13})$ ;3列目に5列目を  $\frac{2}{13}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{26} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

左  $Q(4;\frac{26}{5})$ ;4行目を  $\frac{26}{5}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

左  $P(5,4;-\frac{2}{13})$ ;5行目に4行目を  $-\frac{2}{13}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

右  $P(4,5;\frac{4}{5})$ ;4 列目に 5 列目を  $\frac{4}{5}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

左  $Q(5;5)$ ;5 行目を 5 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 5

**問題 6**

$$\begin{pmatrix} 39 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 1 \\ 65 & 0 & 0 & 1 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \\ 104 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1;\frac{1}{39})$ ;1 行目を  $\frac{1}{39}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 1 \\ 65 & 0 & 0 & 1 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \\ 104 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

左  $P(2,1;-11)$ ;2 行目に 1 行目を  $-11$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 65 & 0 & 0 & 1 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \\ 104 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

左 P(3,1;-65);3行目に1行目を -65倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \\ 104 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

左 P(4,1;-50);4行目に1行目を -50倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 104 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

左 P(5,1;-104);5行目に1行目を -104倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

右 P(2,4);2列目と4列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左 P(3,2;-1);3行目に2行目を -1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(5,2;-2)$ ;5 行目に 2 行目を  $-2$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

問題 7

$$\begin{pmatrix} 26 & 35 & 9 & 54 \\ 72 & 101 & 26 & 156 \\ 107 & 148 & 38 & 229 \\ 102 & 144 & 37 & 223 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1;\frac{1}{26})$ ;1 行目を  $\frac{1}{26}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{35}{26} & \frac{9}{26} & \frac{27}{13} \\ 72 & 101 & 26 & 156 \\ 107 & 148 & 38 & 229 \\ 102 & 144 & 37 & 223 \end{pmatrix}$$

左  $P(2,1;-72)$ ;2 行目に 1 行目を  $-72$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{35}{26} & \frac{9}{26} & \frac{27}{13} \\ 0 & \frac{53}{13} & \frac{14}{13} & \frac{84}{13} \\ 107 & 148 & 38 & 229 \\ 102 & 144 & 37 & 223 \end{pmatrix}$$

左  $P(3,1;-107)$ ;3 行目に 1 行目を  $-107$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{35}{26} & \frac{9}{26} & \frac{27}{13} \\ 0 & \frac{53}{13} & \frac{14}{13} & \frac{84}{13} \\ 0 & \frac{103}{26} & \frac{25}{26} & \frac{88}{13} \\ 102 & 144 & 37 & 223 \end{pmatrix}$$

左  $P(4,1;-102)$ ;4 行目に 1 行目を  $-102$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{35}{26} & \frac{9}{26} & \frac{27}{13} \\ 0 & \frac{53}{13} & \frac{14}{13} & \frac{84}{13} \\ 0 & \frac{103}{26} & \frac{25}{26} & \frac{88}{13} \\ 0 & \frac{87}{13} & \frac{22}{13} & \frac{145}{13} \end{pmatrix}$$



右 P(1,2;  $-\frac{35}{26}$ ); 1 列目に 2 列目を  $-\frac{35}{26}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{26} & \frac{27}{13} \\ 0 & \frac{53}{13} & \frac{14}{13} & \frac{84}{13} \\ 0 & \frac{103}{26} & \frac{25}{26} & \frac{88}{13} \\ 0 & \frac{87}{13} & \frac{22}{13} & \frac{145}{13} \end{pmatrix}$$

右 P(1,3;  $-\frac{9}{26}$ ); 1 列目に 3 列目を  $-\frac{9}{26}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{27}{13} \\ 0 & \frac{53}{13} & \frac{14}{13} & \frac{84}{13} \\ 0 & \frac{103}{26} & \frac{25}{26} & \frac{88}{13} \\ 0 & \frac{87}{13} & \frac{22}{13} & \frac{145}{13} \end{pmatrix}$$

右 P(1,4;  $-\frac{27}{13}$ ); 1 列目に 4 列目を  $-\frac{27}{13}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{53}{13} & \frac{14}{13} & \frac{84}{13} \\ 0 & \frac{103}{26} & \frac{25}{26} & \frac{88}{13} \\ 0 & \frac{87}{13} & \frac{22}{13} & \frac{145}{13} \end{pmatrix}$$

左 Q(2;  $\frac{13}{53}$ ); 2 行目を  $\frac{13}{53}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{53} & \frac{84}{53} \\ 0 & \frac{103}{26} & \frac{25}{26} & \frac{88}{13} \\ 0 & \frac{87}{13} & \frac{22}{13} & \frac{145}{13} \end{pmatrix}$$

左 P(3,2;  $-\frac{103}{26}$ ); 3 行目に 2 行目を  $-\frac{103}{26}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{53} & \frac{84}{53} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{106} & \frac{26}{53} \\ 0 & \frac{87}{13} & \frac{22}{13} & \frac{145}{13} \end{pmatrix}$$

左 P(4,2;  $-\frac{87}{13}$ ); 4 行目に 2 行目を  $-\frac{87}{13}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{53} & \frac{84}{53} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{106} & \frac{26}{53} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{53} & \frac{29}{53} \end{pmatrix}$$

右 P(2,3;  $-\frac{14}{53}$ ); 2 列目に 3 列目を  $-\frac{14}{53}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{84}{53} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{106} & \frac{26}{53} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{53} & \frac{29}{53} \end{pmatrix}$$

右 P(2,4;  $-\frac{84}{53}$ ); 2 列目に 4 列目を  $-\frac{84}{53}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{106} & \frac{26}{53} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{53} & \frac{29}{53} \end{pmatrix}$$

左 Q(3;  $-\frac{106}{9}$ ); 3 行目を  $-\frac{106}{9}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{52}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{53} & \frac{29}{53} \end{pmatrix}$$

左 P(4,3;  $\frac{4}{53}$ ); 4 行目に 3 行目を  $\frac{4}{53}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{52}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

右 P(3,4;  $\frac{52}{9}$ ); 3 列目に 4 列目を  $\frac{52}{9}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

左 Q(4; 9); 4 行目を 9 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 4

問題 8

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1; \frac{1}{2})$ ; 1 行目を  $\frac{1}{2}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

左  $P(2, 1; -2)$ ; 2 行目に 1 行目を  $-2$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

左  $P(3, 1; -1)$ ; 3 行目に 1 行目を  $-1$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

右  $P(1, 2; -\frac{5}{2})$ ; 1 列目に 2 列目を  $-\frac{5}{2}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

右  $P(1, 3; -\frac{9}{2})$ ; 1 列目に 3 列目を  $-\frac{9}{2}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

左  $Q(2; \frac{1}{2})$ ; 2 行目を  $\frac{1}{2}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

左  $P(3,2;-\frac{1}{2})$ ;3行目に2行目を  $-\frac{1}{2}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

右  $P(2,3;-\frac{3}{2})$ ;2列目に3列目を  $-\frac{3}{2}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

左  $Q(3;-4)$ ;3行目を  $-4$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 3

### 問題 9

$$\begin{pmatrix} 54 & 28 & 123 & 69 & 220 \\ 103 & 53 & 234 & 132 & 421 \\ 178 & 91 & 404 & 228 & 726 \\ 153 & 80 & 349 & 196 & 625 \\ 20 & 11 & 46 & 26 & 83 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1;\frac{1}{54})$ ;1行目を  $\frac{1}{54}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{27} & \frac{41}{18} & \frac{23}{18} & \frac{110}{27} \\ 103 & 53 & 234 & 132 & 421 \\ 178 & 91 & 404 & 228 & 726 \\ 153 & 80 & 349 & 196 & 625 \\ 20 & 11 & 46 & 26 & 83 \end{pmatrix}$$

左  $P(2,1;-103)$ ;2行目に1行目を  $-103$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{27} & \frac{41}{18} & \frac{23}{18} & \frac{110}{27} \\ 0 & -\frac{11}{27} & -\frac{11}{18} & \frac{7}{18} & \frac{37}{27} \\ 178 & 91 & 404 & 228 & 726 \\ 153 & 80 & 349 & 196 & 625 \\ 20 & 11 & 46 & 26 & 83 \end{pmatrix}$$

左 P(3,1;-178);3 行目に 1 行目を  $-178$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{27} & \frac{41}{18} & \frac{23}{18} & \frac{110}{27} \\ 0 & -\frac{11}{27} & -\frac{11}{18} & \frac{7}{18} & \frac{37}{27} \\ 0 & -\frac{35}{27} & -\frac{13}{9} & \frac{5}{9} & \frac{22}{27} \\ 153 & 80 & 349 & 196 & 625 \\ 20 & 11 & 46 & 26 & 83 \end{pmatrix}$$

左 P(4,1;-153);4 行目に 1 行目を  $-153$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{27} & \frac{41}{18} & \frac{23}{18} & \frac{110}{27} \\ 0 & -\frac{11}{27} & -\frac{11}{18} & \frac{7}{18} & \frac{37}{27} \\ 0 & -\frac{35}{27} & -\frac{13}{9} & \frac{5}{9} & \frac{22}{27} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ 20 & 11 & 46 & 26 & 83 \end{pmatrix}$$

左 P(5,1;-20);5 行目に 1 行目を  $-20$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{27} & \frac{41}{18} & \frac{23}{18} & \frac{110}{27} \\ 0 & -\frac{11}{27} & -\frac{11}{18} & \frac{7}{18} & \frac{37}{27} \\ 0 & -\frac{35}{27} & -\frac{13}{9} & \frac{5}{9} & \frac{22}{27} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{17}{27} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{41}{27} \end{pmatrix}$$

右 P(1,2;  $-\frac{14}{27}$ );1 列目に 2 列目を  $-\frac{14}{27}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{41}{18} & \frac{23}{18} & \frac{110}{27} \\ 0 & -\frac{11}{27} & -\frac{11}{18} & \frac{7}{18} & \frac{37}{27} \\ 0 & -\frac{35}{27} & -\frac{13}{9} & \frac{5}{9} & \frac{22}{27} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{17}{27} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{41}{27} \end{pmatrix}$$

右 P(1,3;  $-\frac{41}{18}$ );1 列目に 3 列目を  $-\frac{41}{18}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{18} & \frac{110}{27} \\ 0 & -\frac{11}{27} & -\frac{11}{18} & \frac{7}{18} & \frac{37}{27} \\ 0 & -\frac{35}{27} & -\frac{13}{9} & \frac{5}{9} & \frac{22}{27} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{17}{27} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{41}{27} \end{pmatrix}$$

右 P(1,4;  $-\frac{23}{18}$ ); 1 列目に 4 列目を  $-\frac{23}{18}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{110}{27} \\ 0 & -\frac{11}{27} & -\frac{11}{18} & \frac{7}{18} & \frac{37}{27} \\ 0 & -\frac{35}{27} & -\frac{13}{9} & \frac{5}{9} & \frac{22}{27} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{17}{27} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{41}{27} \end{pmatrix}$$

右 P(1,5;  $-\frac{110}{27}$ ); 1 列目に 5 列目を  $-\frac{110}{27}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{27} & -\frac{11}{18} & \frac{7}{18} & \frac{37}{27} \\ 0 & -\frac{35}{27} & -\frac{13}{9} & \frac{5}{9} & \frac{22}{27} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{17}{27} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{41}{27} \end{pmatrix}$$

左 Q(2;  $-\frac{27}{11}$ ); 2 行目を  $-\frac{27}{11}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{21}{22} & -\frac{37}{11} \\ 0 & -\frac{35}{27} & -\frac{13}{9} & \frac{5}{9} & \frac{22}{27} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{17}{27} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{41}{27} \end{pmatrix}$$

左 P(3,2;  $\frac{35}{27}$ ); 3 行目に 2 行目を  $\frac{35}{27}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{21}{22} & -\frac{37}{11} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{15}{22} & -\frac{39}{11} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{17}{27} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{41}{27} \end{pmatrix}$$

左 P(4,2;  $-\frac{2}{3}$ ); 4 行目に 2 行目を  $-\frac{2}{3}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{21}{22} & -\frac{37}{11} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{15}{22} & -\frac{39}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{25}{22} & \frac{43}{11} \\ 0 & \frac{17}{27} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{41}{27} \end{pmatrix}$$

左 P(5,2;  $-\frac{17}{27}$ ); 5 行目に 2 行目を  $-\frac{17}{27}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{21}{22} & -\frac{37}{11} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{15}{22} & -\frac{39}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{25}{22} & \frac{43}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{23}{22} & \frac{40}{11} \end{pmatrix}$$

右 P(2,3;  $-\frac{3}{2}$ ); 2 列目に 3 列目を  $-\frac{3}{2}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{22} & -\frac{37}{11} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{15}{22} & -\frac{39}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{25}{22} & \frac{43}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{23}{22} & \frac{40}{11} \end{pmatrix}$$

右 P(2,4;  $\frac{21}{22}$ ); 2 列目に 4 列目を  $\frac{21}{22}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{37}{11} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{15}{22} & -\frac{39}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{25}{22} & \frac{43}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{23}{22} & \frac{40}{11} \end{pmatrix}$$

右 P(2,5;  $\frac{37}{11}$ ); 2 列目に 5 列目を  $\frac{37}{11}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{15}{22} & -\frac{39}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{25}{22} & \frac{43}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{23}{22} & \frac{40}{11} \end{pmatrix}$$

左 Q(3,2); 3 行目を 2 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{11} & -\frac{78}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{25}{22} & \frac{43}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{23}{22} & \frac{40}{11} \end{pmatrix}$$

左  $P(4,3;\frac{1}{2})$ ;4行目に3行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{11} & -\frac{78}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{23}{22} & \frac{40}{11} \end{pmatrix}$$

左  $P(5,3;\frac{1}{2})$ ;5行目に3行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{11} & -\frac{78}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

右  $P(3,4;\frac{15}{11})$ ;3列目に4列目を $\frac{15}{11}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{78}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

右  $P(3,5;\frac{78}{11})$ ;3列目に5列目を $\frac{78}{11}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

左  $Q(4;\frac{11}{5})$ ;4行目を $\frac{11}{5}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$



左  $P(5,4;-\frac{4}{11})$ ;5行目に4行目を  $-\frac{4}{11}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

右  $P(4,5;-\frac{4}{5})$ ;4列目に5列目を  $-\frac{4}{5}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

左  $Q(5;-5)$ ;5行目を  $-5$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 5

### 問題 10

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 16 & 6 & 0 \\ 18 & 6 & 0 \\ 15 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1;\frac{1}{13})$ ;1行目を  $\frac{1}{13}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{13} & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 16 & 6 & 0 \\ 18 & 6 & 0 \\ 15 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

左 P(2,1;-8);2行目に1行目を-8倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{13} & 0 \\ 16 & 6 & 0 \\ 18 & 6 & 0 \\ 15 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

左 P(3,1;-16);3行目に1行目を-16倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{13} & 0 \\ 18 & 6 & 0 \\ 15 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

左 P(4,1;-18);4行目に1行目を-18倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{13} & 0 \\ 15 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

左 P(5,1;-15);5行目に1行目を-15倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \end{pmatrix}$$

右 P(1,2;-\frac{5}{13});1列目に2列目を-\frac{5}{13}倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \end{pmatrix}$$

左  $Q(2; -13)$ ; 2行目を  $-13$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(3, 2; \frac{2}{13})$ ; 3行目に2行目を  $\frac{2}{13}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(4, 2; \frac{12}{13})$ ; 4行目に2行目を  $\frac{12}{13}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \end{pmatrix}$$

左  $P(5, 2; -\frac{3}{13})$ ; 5行目に2行目を  $-\frac{3}{13}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

問題 11

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 15 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1; \frac{1}{5})$ ; 1行目を  $\frac{1}{5}$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 7 & 5 & 4 \\ 15 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

左 P(2,1;-7);2行目に1行目を $-7$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 15 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

左 P(3,1;-15);3行目に1行目を $-15$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

右 P(1,2; $-\frac{4}{5}$ );1列目に2列目を $-\frac{4}{5}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

右 P(1,3; $-\frac{3}{5}$ );1列目に3列目を $-\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

左 Q(2; $-\frac{5}{3}$ );2行目を $-\frac{5}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

左 P(3,2;1);3行目に2行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

右 P(2,3; $-\frac{1}{3}$ );2列目に3列目を $-\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

左  $Q(3,3)$ ;3行目を3倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 3

問題 12

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 25 \\ 3 & 1 & 11 \\ 11 & 4 & 40 \\ 11 & 6 & 40 \\ 8 & 3 & 27 \end{pmatrix}$$

左  $Q(1, \frac{1}{7})$ ;1行目を $\frac{1}{7}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{25}{7} \\ 3 & 1 & 11 \\ 11 & 4 & 40 \\ 11 & 6 & 40 \\ 8 & 3 & 27 \end{pmatrix}$$

左  $P(2,1;-3)$ ;2行目に1行目を $-3$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{25}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 11 & 4 & 40 \\ 11 & 6 & 40 \\ 8 & 3 & 27 \end{pmatrix}$$

左  $P(3,1;-11)$ ;3行目に1行目を $-11$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{25}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} \\ 11 & 6 & 40 \\ 8 & 3 & 27 \end{pmatrix}$$

左  $P(4,1;-11)$ ;4行目に1行目を $-11$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{25}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{20}{7} & \frac{5}{7} \\ 8 & 3 & 27 \end{pmatrix}$$

左  $P(5,1;-8)$ ;5 行目に 1 行目を  $-8$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{25}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{20}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

右  $P(1,2;-\frac{2}{7})$ ;1 列目に 2 列目を  $-\frac{2}{7}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{25}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{20}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

右  $P(1,3;-\frac{25}{7})$ ;1 列目に 3 列目を  $-\frac{25}{7}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{20}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

左  $Q(2;7)$ ;2 行目を 7 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{20}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

左  $P(3,2;-\frac{6}{7})$ ;3 行目に 2 行目を  $-\frac{6}{7}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{20}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

左  $P(4,2;-\frac{20}{7})$ ;4行目に2行目を  $-\frac{20}{7}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

左  $P(5,2;-\frac{5}{7})$ ;5行目に2行目を  $-\frac{5}{7}$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

右  $P(2,3;-2)$ ;2列目に3列目を  $-2$  倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

左  $Q(3,-1)$ ;3行目を  $-1$  倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

左  $P(4,3;5)$ ;4行目に3行目を5倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

左 P(5,3;3);5 行目に 3 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3