代幾 I 計算演習 (2005/12/08) の解答

A.1 係数行列を A, 変数ベクトルを $\vec{x}$, 定数ベクトルを $\vec{v}$ とすると、次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ c \\ b \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \vec{v}$$

となる。ここで、クラーメルの公式より、次の式が成立する。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & a & c & d \\ d & d & b & c \\ c & c & a & b \\ b & b & d & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & b & a & d \\ d & a & d & c \\ c & d & c & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}} \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c & a \\ d & a & b & d \\ c & d & a & c \\ b & c & d & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}}$$

ところが、x_1 は、分母分子が同じだし、x_2, x_3, x_4 は、分子の行列式で、同じ列が含まれる (x_2 は、最初と次、x_3 は、最初と三番目、x_4 は、最初と最後の列がそれぞれ同じ) ため、分子は 0 となる。この結果、答えは、

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

となる。

A.2 係数行列を A, 変数ベクトルを $\vec{x}$, 定数ベクトルを $\vec{v}$ とすると、次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \vec{v}$$

となる。ここで、クラーメルの公式より、次の式が成立する。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & b & c & d \\ e^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ e^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & e & c & d \\ a^2 & e^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & e^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & e & d \\ a^2 & b^2 & e^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & e^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}} \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & e^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}}$$

ところが、個々の行列式は、ヴァンデルモンドの行列式なので、結果は差積となる。しかも、それぞれ x_1 は、a と e、x_2 は、b と e が置き換わった形になっている。この為、置き換

わっていない変数の差は、分母分子に共通に現れるため、共通因子を約分すると、次の結果になる。

$$
\begin{cases}
x_1 & = & \dfrac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} \\
x_2 & = & \dfrac{(a-e)(e-c)(e-d)}{(a-b)(b-c)(b-d)} \\
x_3 & = & \dfrac{(a-e)(b-e)(e-d)}{(a-c)(b-c)(c-d)} \\
x_4 & = & \dfrac{(a-e)(b-e)(c-e)}{(a-d)(b-d)(c-d)}
\end{cases}
$$

A.3 係数行列を A, 変数ベクトルを $\vec{x}$, 定数ベクトルを $\vec{v}$ とすると、次のようになる。

$$
A = \begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \vec{v}
$$

となる。ここで、クラーメルの公式より、次の式が成立する。

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4 \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4 \end{vmatrix}}
$$

$$
x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4 \end{vmatrix}} \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4 \end{vmatrix}}
$$

ここで、

$$
\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \quad (\text{ただし、}abcd \neq 0 \text{ の時})
$$

であり、また、この式で、一つの変数が 0 で他が 0 でない場合は、0 でない変数の積になるので、結果は次のようになる。

$$\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{1}{1(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})} & = & \dfrac{12}{37} \\ x_2 & = & \dfrac{1}{2(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})} & = & \dfrac{6}{37} \\ x_3 & = & \dfrac{1}{3(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})} & = & \dfrac{4}{37} \\ x_4 & = & \dfrac{1}{4(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})} & = & \dfrac{3}{37} \end{cases}$$