代幾 I 演習 (2005/04/27)

例題　ドモアブルの公式を用いて cos と sin の倍角公式を同時に求めてみよう。

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = e^{2i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

の右辺を展開すると，

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i \cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

を得る。両辺の実部と虚部はそれぞれ等しいので，

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

となり倍角公式が同時に得られた。

問題 17　　ドモアブルの公式を用いて、cos と sin の 3 倍角公式を求めよ。

問題 18

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を利用して，三角関数の積を和に直す公式，

$$\cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}(\sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi))$$

を証明せよ。

(ヒント: 右辺の形に注目して $\frac{1}{2}(e^{i(\theta+\varphi)} - e^{i(\theta-\varphi)})$ を用いることを考えてみよ。)

2. $\cos\theta\cos\varphi$ の公式と $\sin\theta\sin\varphi$ の公式を同時に導いてみよ。

問題 19　　$z \neq 1$ の時に、等比数列の和の公式

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

を利用して、次の等式を示せ。ただし、$\theta \neq 2m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ とする。

1. $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta = \dfrac{1 - \cos\theta + \cos(n-1)\theta - \cos n\theta}{2(1-\cos\theta)}$

2. $\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin(n-1)\theta = \dfrac{\sin\theta + \sin(n-1)\theta - \sin n\theta}{2(1-\cos\theta)}$

問題 20　$r \neq 1$ であるような正の実数 r に対し、次の和を求めよ。

1. $1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^{n-1}\cos(n-1)\theta$
2. $r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + \cdots + r^{n-1}\sin(n-1)\theta$

問題 21　次の整数の組の最大公約数を求めよ。

1.　$a = 30, b = 22$　2.　$a = 84, b = 60$,　3.　$a = 252, b = 270$,

4.　$a = 12345654321, b = 1234321$,　5.　$a = 832040, b = 2584$,　6.　$a = 2^{30}-1, b = 2^{18}-1$.

問題 22　次の式をみたすような整数 x, y を一組求めよ。

1.　$7x + 5y = 1$　2.　$13x + 11y = 1$,　3.　$30x + 42y = 6$.

問題 23　問題 21 のそれぞれの問に対し、d を a と b の最大公約数とした時，$ax + by = d$ となる整数 x, y を一組求めよ。

問題 24

1. $7x + 11y = 1$ となるような整数 x, y を一組求めよ。
2. 上の問の x を用いて、7 で割ると割り切れ 11 で割ると 1 余る整数をひとつ求めよ。
3. $14x + 55y$ を 7 で割った余りと、11 で割った余りを求めよ。
4. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数を求めよ。
5. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数で 0 以上 77 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 25　互いに素な正整数 a, b と整数 $0 \leq r < a$ と $0 \leq s < b$ が与えられている。
　このとき、a で割ると r 余り、b で割ると s 余る整数で 0 以上 ab 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 26　a, b の最大公約数を d とし，整数 x_0, y_0 は $ax_0 + by_0 = d$ を満すとする。このとき，$ax + by = d$ の整数解は整数 t を用いて

$$x = x_0 + \frac{bt}{d},\ y = y_0 - \frac{at}{d}$$

と書くことができることを示せ。

　以下では一変数多項式を単に多項式ということにする。

問題 27　二項定理の証明をしなさい（ヒント：講義では、略証明を行っている）

問題 28

$N[x] = \{f(x)|x$ を変数とする自然数係数多項式$\}$

$C[x] = \{f(x)|x$ を変数とする複素係数多項式$\}$

とした時に、それぞれ、$N[x]$ と、$C[x]$ が四則（和、差、積、商）と、多項式の合成に関して、閉じているならば、その証明を、閉じていないならば、その反例を挙げなさい。

問題 29　因数定理を用いて、次の代数方程式の解 (少くても整数のものが一つある) を一つ求めなさい。

1. $x^3 + 2x^2 - 9x + 6 = 0$
2. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$
3. $x^5 - x^3 - 6x^2 + 6 = 0$
4. $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$

問題 30　多項定理を用いて、次の問に答えなさい。

1. $(x + 2y)^{10}$ の x^7y^3 の係数を求めなさい。
2. $(x + y + z)^{10}$ の $x^2y^3z^5$ の係数を求めなさい。
3. $(x - y + 2z)^{10}$ の $x^3y^5z^2$ の係数を求めなさい。

問題 31　次の deg の性質を証明しなさい。

1. $\deg\ (f(x) \pm g(x)) \leq \max(\deg\ f(x), \deg\ g(x))$
2. $\deg\ (f(x)g(x)) = \deg\ f(x) + \deg\ g(x)$ (ただし、$f(x)$ も $g(x)$ も 0 でないとする)
3. $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ で $(g(x) \neq 0, h(x)$ は商) の時 $\deg\ h(x) = \deg\ f(x) - \deg\ g(x)$

問題 32　$\deg\ f(g(x))$ を $\deg\ f(x)$ と $\deg\ g(x)$ で表すと、どうなるか？

問題 33　次の多項式 $f(x)$, $g(x)$ に対し、$f(x)u(x) + g(x)v(x)$ が $f(x)$, と $g(x)$ の最大公約数になるような多項式 $u(x)$, $v(x)$ を一組求めよ。

1. $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^2 + x - 2$.

2. $f(x) = x^3 + 1,\ \ g(x) = x^3 - 2x - 1.$

3. $f(x) = x^3 + 2,\ \ g(x) = x^2 + x + 2.$

問題 34　多項式 $f(x)$ を $x - a$, $x - b$ $(a \neq b)$ で割った余りをそれぞれ r, s とするとき $f(x)$ を $(x - a)(x - b)$ で割った余りを求めよ。

問題 35　$x^2 + 1$ で割ると $x - 1$ 余り、 $x^2 + x + 1$ で割ると $x + 2$ 余るような多項式の内、次数がもっとも小さいものを求めよ。

問題 36　多項式 $f(x), g(x)$ は $(x^2 + 1)f(x) + (x^2 + x + 1)g(x) = 1$ を満たすとする。

1. $(x^2 + x + 1)g(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れ、 $x^2 + 1$ で割ると 1 余ることを示せ。

2. $f(x)$ を用いて, $x^2 + 1$ で割ると割り切れ、$x^2 + x + 1$ で割ると 1 余る多項式をひとつ求めよ。

3. $(x + 3)(x^2 + 1)f(x) + (x^2 + x + 1)g(x)$ を $x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。

4. $x^2 + 1$ で割ると $x - 1$ 余り、$x^2 + x + 1$ で割ると $x + 2$ 余るような多項式を求めよ。

5. $x^2 + 1$ で割ると $x - 1$ 余り、$x^2 + x + 1$ で割ると $x + 2$ 余るような多項式で次数が 3 以下のものはちょうど一つあることを示せ。

問題 37

1. $\zeta = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ とする。このとき、次の等式を示せ。

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x - \zeta)(x - \zeta^2)(x - \zeta^3)(x - \zeta^4)$$

2. 自然数 n に対し、$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ とおく。このとき、次の等式を示せ。

$$x^n - 1 = (x - 1)(x - \zeta)(x - \zeta^2)\cdots(x - \zeta^{n-2})(x - \zeta^{n-1})$$

問題 38

次の多項式の組の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求めよ。

1. $x^3 - x^2 - 4x + 4,\ x^2 + 2x - 3.$

2. $x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x + 2,\ x^4 + x^3 + 5x + 2.$

3. $x^3 + x^2 - 6x + 4,\ x^5 + 6x + 5.$

4. $x^{10} + x^5 + 1,\ x^4 + x^2 + 1.$