代幾 I 演習 (2005/05/12)

問題 39　実係数の 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ が虚根 $a+bi$ をもてば、$-2a$ も根であることを示せ。

問題 40　複素係数の多項式 $f(x)=x^3+(-2-i)x^2+(1+2i)x+(4+3i)$ とその係数をすべて共役複素数で置き換えた多項式 $g(x)=x^3+(-2+i)x^2+(1-2i)x+(4-3i)$ を考える。

1. a が $f(x)=0$ の根ならば $\overline{a}$ は $g(x)=0$ の根となることを示せ。
2. $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ と因数分解されるとき、$g(x)$ を因数分解せよ。
3. $f(x)g(x)$ は実係数の多項式となることを示せ。

問題 41　多項式 $f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$ を考える。相異なる $n+1$ 個の複素数 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ に対して、$f(a_0)=f(a_1)=\cdots=f(a_n)=0$ となるならば、$c_0=c_1=\cdots=c_n=0$ であることを証明せよ。

問題 42　多項式 $f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$, $g(x)=d_0x^n+d_1x^{n-1}+\cdots+d_{n-1}x+d_n$ に対し、$h(x)=f(x)-g(x)$ に前の問題の結果を適用することで次を証明せよ。

$c_0=d_0,\ c_1=d_1,\ \ldots c_n=d_n$ であるための必要十分条件は相異なる $n+1$ 個の複素数 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ に対して、$f(a_0)=g(a_0),\ f(a_1)=g(a_1),\ \ldots f(a_n)=g(a_n)$ となることである。

問題 43

1. $(x-y)^2$ は x,y についての対称式であることを示せ。
2. ω を $\omega^3=1$ となる $\omega\neq 1$ であるような複素数とする。$(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$ は x,y,z についての対称式であることを示せ。
3. $(x_1x_2-x_3x_4)(x_1x_3-x_2x_4)(x_1x_4-x_2x_3)$ は x_1,x_2,x_3,x_4 についての対称式であることを示せ。

問題 44　次の対称式を基本対称式の多項式で表わせ。

1. $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$,
2. x^3+y^3,
3. $x^3+y^3+z^3$,
4. $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$.

例題　ここでは対称式 $f(x,y,z)=(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3$ を基本対称式の多項式として表わす別の方法を考えることにする。

$f(x,y,z)$ は基本対称式 $s_1=x+y+z,\ s_2=xy+yz+zx,\ s_3=xyz$ の多項式として表わすことができるが $f(x,y,z)$ が 3 次の同次式であることより、

$$f(x,y,z)=as_1^3+bs_1s_2+cs_3$$

と置くことができる。

この式の x,y,z に適当に数を代入してみると $-2c=f(1,1,-2)=6,\ 8a+2b=f(1,1,0)=10,\ a-2b=f(2,-1,0)=-1$ が得られる。これより、$a=1,\ b=1,\ c=-3$ となるので、

$$f(x,y,z)=s_1^3+s_1s_2-3s_3$$

となることがわかる。

この方法は交代式を対称式と差積の積で表わすときにも用いることができる。

問題 45

1. $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ は α,β,γ の対称式であることを示せ。
2. 三次方程式 $x^3+3px+q=0$ の根を α,β,γ としたとき、$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ を p,q の多項式で表わせ。
3. $f(x)=x^3+3px+q$ としたとき，$f(x)=0$ が重根を持つための必要十分条件は $f(x)$ と $f'(x)=3x^2+3p$ が互いに素ではないことを示せ。また，この条件を p,q の多項式を用いて表せ。

問題 46　方程式 $x^7-1=0$ の根と係数の関係を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$$

問題 47　実数を係数とする n 次方程式 $f(x)=0$ の根を重複度も込めて、$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ とする。このとき、$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ の差積の 2 乗

$$\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)^2=\begin{array}{cccc}(\alpha_2-\alpha_1)^2 & (\alpha_3-\alpha_1)^2 & \cdots & (\alpha_n-\alpha_1)^2\\ & (\alpha_3-\alpha_2)^2 & \cdots & (\alpha_n-\alpha_2)^2\\ & & \cdots & \\ & & & (\alpha_n-\alpha_{n-1})^2\end{array}$$

は実数であることを示せ。

問題 48　次の交代式を差積と基本対称式で表わせ。

1. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$,
2. $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$.