

代幾 I 演習 (2005/05/19)

問題 49 線型空間の公理

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (交換法則)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (結合法則)
- $\exists \vec{v} \forall \vec{a} [\vec{a} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{a} = \vec{a}]$ (零元 (単位元) の存在)
- $\forall \vec{a} \exists \vec{v} [\vec{a} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{a} = \vec{0}]$ (逆元の存在)
- $c(\vec{x} + \vec{y}) = c\vec{x} + c\vec{y}$ (スカラー倍の分配則 I)
- $(c + d)\vec{x} = c\vec{x} + d\vec{x}$ (スカラー倍の分配則 II)
- $(cd)\vec{x} = c(d\vec{x})$ (スカラー倍の結合法則)

について、次の問に答えなさい。

1. 零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい。
2. 任意の要素 x に対して、その 0 倍した元 $0x$ は、零元であることを証明しなさい。
3. 一つに元に対して、その逆元の性質を満す元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい。

問題 50 次の不等式を証明しなさい。

1. $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ (シュワルツの不等式)
2. $\sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2 + (c+z)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (三角不等式)

問題 51 次の場合に、点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ に直交する直線の方程式を求めよ。

1. $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, d_3 = 0$ のとき。
2. $d_1 \neq 0, d_2 = 0, d_3 = 0$ のとき。

問題 52 空間内で次の条件を満す平面の方程式を求めよ。

1. 点 $(2, 4, -3)$ を通り、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ と直交する平面。

2. 次のパラメータ表示を持つ平面

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. 点 $(1, 2, 3)$, $(1, 0, -1)$, $(2, 2, 1)$ を通る平面。

問題 53 空間内で次の条件を満たす平面のパラメータ表示を求めよ。

1. 点 $(-2, 3, 1)$ を通りベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ とに平行な平面。

2. 次の方程式で表される平面。

$$3x - 2y + 5z = 6.$$

3. 点 $(1, 1, 2)$, $(1, -2, -1)$, $(3, -1, 1)$ を通る平面。

問題 54 空間内で次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

1. 点 $(-1, 2, -3)$ を通り、 $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ と平行な直線。

2. 次のパラメータ表示を持つ平面

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. 点 $(2, 2, 3)$, $(1, 2, -1)$ を通る直線。