代幾 I 演習 (2005/05/19)

問題 55

複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ の要素 $\boldsymbol{x} = a + bi, \boldsymbol{y} = c + di$ と 実数 e に関して、普通に和 $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a + c) + (d + i)i)$ と、定数倍 ($e\boldsymbol{x} = (ea) + (eb)i$) を考えると、$\boldsymbol{C}$ 全体は、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 56

実数係数の二次式全体の集合を $R_2[x] = \{ax^2 + b^x + c | a, b, c \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$R_2[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = ax^2 + bx + c, \boldsymbol{g} = g(x) = ex^2 + fx + g$ と、実数 h に対して、普通に、和 $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a+e)x^2 + (c+f)x + (c+g))$ と、定数倍 ($h\boldsymbol{f} = (ha)x^2 + (hb)x + (hc)$) を考えるとき、$R_2[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 57　複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ の要素について、次の問に答えなさい。

1. 二つの複素数 $x = 1 + i, y = 2 - i$ と、実数 a, b に関して、もし、$ax + by = 0$ が成立するならば、実は $a = b = 0$ であることを示せ。
2. 上の問題で、a, b が複素数でもよければ、そのような複素数の組は $a = b = 0$ 以外にもあることを示せ。(ヒント: 具体的に、そのような a, b を示すだけでよい)。
3. 複素数 $z = 4 + i$ が、実数 c, d と上記の複素数 x, y を用いて $z = cx + dy$ と表現できたときに、この c, d を求めよ。
4. 任意の複素数 z に対して、必ずある実数の組 c, d が存在して、$z = cx + dy$ と表現できることを示せ。
5. 二つの複素数 x, y が、$a = b = 0$ 以外の実数に対しては、常に $ax + by \neq 0$ が成立するならば、実は、任意の複素数 z に対して、必ずある実数の組 c, d が存在して、$z = cx + dy$ と表現できることを示せ。

問題 58　次の行列 A, B とベクトル $\boldsymbol{x}$ について、以下の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Ax を求めなさい。
2. $A + B$ を求めなさい。

3. AB を求めなさい。

4. AB と BA は同じになるだろうか？ 確認してみなさい。

5. $A(Bx)$ と $(AB)x$ をそれぞれ計算してみなさい。

6. A^{-1} を求めなさい。

7. $(AB)^{-1}$ は、A^{-1} と B^{-1} で表すとどうなるか？

問題 59　二次元の点を、原点を中心に α だけ反時計回りに回転させる行列を R_α とすると、その行列の成分は、次のようになる。

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

講義の定義では、R_α と R_β の積 ($R_\beta R_\alpha$) を、図形的な意味から $R_{\alpha+\beta}$ で定義した。
　これが、一般的な行列の積の定義と矛盾していないことを示しなさい。

問題 60　空間内で次の条件を満たす直線のパラメータ表示を求めよ。

1. 点 $(1,2,3)$ を通り、$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と平行な直線。

2. 点 $(2,2,0), (3,5,1)$ を通る直線。

3. 次の二つの平面の交わりとして表される直線。

$$3x - 2y + z = 4,\ x + z = 2.$$

4. 点 $(3,3,2)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とに直交する直線。

問題 61　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, とするとき，次を計算せよ。

1. $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$,

2. $5\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{c}$,

3. $-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$.

問題 62 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線型結合として表すことはできないことを示せ。

問題 63 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. $\boldsymbol{K}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

2. 上の問の結果を利用して，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

   (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 64 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x & +3y & = & 5 \\ x & +2y & = & -2 \end{cases}$$

を解き、その結果を用いて $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ が線型独立かどうかを調べよ。

問題 65

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とする。$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6)$ としたとき次の問に答えよ。

1. $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ は線型独立である。

2. $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6$ のうちどれを付け加えても線型従属になる。

問題 66 $\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は線型独立であることを証明せよ。

問題 67 次を証明せよ。

1. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に同じベクトルが 2 個以上現れるなら $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に零ベクトル $\boldsymbol{0}$ が現れるならば、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

問題 68　$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が与えられたとする。$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線型結合として異なる方法で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b} &= c_1'\boldsymbol{a}_1 + c_2'\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n'\boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

と書けたとする。このとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属であることを示せ。

問題 69　次の式を行列とベクトルの積の形で書け。

$$(1)\left\{\begin{array}{rcr} 4x+2y+3z &=& 5 \\ -x+y+2z &=& -3 \end{array}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{array}{rcr} x+2y &=& 2 \\ -x+y &=& 4 \\ 3x+5y &=& 1 \end{array}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{array}{rcr} 2x+3z &=& 1 \\ y+2z &=& -1 \end{array}\right.$$

$$(4)\ -2x+3y+z-w = 0\ .$$

問題 70　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \boldsymbol{K}^m$ とする。次のそれぞれの式を行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ とベクトルの積の形に書き直せ。

(1)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$

(2)　$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$

(3)　$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_3$

(4)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

問題 71

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，次を計算せよ。

$$(1)\ A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\quad (2)\ A\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\quad (3)\ A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad (4)\ A\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$