代幾 I 演習 (2005/06/09)

問題 77　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。すなわち、

$$M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \boldsymbol{R} \right\}$$

とした時、$M_{2,2}$ は、線型空間になっていることを示しなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 78　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. $M_{2,2}$ には、零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. $M_{2,2}$ の零元を求めなさい。
3. 任意の行列 A に対して、その 0 倍した元 $0A$ は、零元であることを証明しなさい。
4. 任意の行列 A に対して、その逆元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniquenss)。
5. 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆元 $-A$ を求めなさい。
6. 任意の行列 A 対して、その (-1) 倍した行列 $(-1)A$ は、その行列の逆元であることを証明しなさい。

問題 79　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. 任意の三つの行列 $A, B, C (\in M_{2,2})$ に対して、 $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示しなさい。
2. もし、任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE_1 = A$ となる行列 E_1 と、$E_2 A = A$ となるような行列 E_2 が、共に、$M_{2,2}$ の中に存在すれば、実は、この二つの E_1, E_2 は、同じ行列であることを証明せよ。
3. 任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE = EA = A$ となる行列 E ($M_{2,2}$ の単位行列と呼ぶ) を (一つ) 求めなさい。
4. 単位行列の性質を満す要素は $M_{2,2}$ には、一つしかないことを示しなさい。(ヒント: 単位行列の性質 [$AE' = E'A = A$] を満す行列 E' があると、それは、一つ前の問題で求めた行列 E と同じになることを示せばよい。)

5. ある行列 A に対して、$AB = E, CA = E$ を満す、行列 B, C が存在すれば、実は、$B = C$ であることを示しなさい。

6. ある行列 A に対して、$AX = XA = E$ を満すような行列 X が、$M_{2,2}$ に存在するときに、その行列 X を 行列 A の逆行列と呼び A^{-1} で表す。もし、行列 A に対して、その逆行列 A^{-1} が存在すれば、それは、一つしかないことを示しなさい。

7. 零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ には、逆行列が存在しないことを示しなさい。

8. 二つの行列 A, B が共に、逆行列を持つならば、二つの行列の積 AB も逆行列を持つことを示しさい。また、この時、AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を、A, B の逆行列 A^{-1}, B^{-1} を用いて表しなさい。

9. 行列 A が逆行列 A^{-1} をもてば、A を $n(n \in \boldsymbol{N})$ 回掛けあわせた行列 A^n も逆行列を持つことを示しなさい。また、A^n の逆行列 $(A^n)^{-1}$ を A^{-1} (と n) を用いて表しなさい。

問題 80　次の図形の方程式を求めなさい。

1. 二点 $(1,3), (2,5)$ を通る直線。

2. 点 $(-1,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に平行な直線。

3. 点 $(2,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直な直線。

4. 二点 $(1,-1,3), (2,-2,1)$ を通る直線。

5. 点 $(2,-1,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に平行な直線。

6. 三点 $(1,0,2), (1,-2,1), (0,0,2)$ を通る平面。

7. 点 $(1,1,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面。

問題 81　次の平面上の直線と点の距離をそれぞれ求めなさい。

1. 直線 $3x - 2y = 1$ と、点 $(2,-1)$。

2. 点 $(1,2)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線と、点 $(3,2)$。

3. 二点 $(2,1), (-1,4)$ を通る直線と、点 $(1,1)$。

4. 点 $(-1,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直な直線と、点 $(1,-1)$。

問題 82　次の空間上の直線と点の距離をそれぞれ求めなさい。

1. 直線 $\frac{x-1}{2} = \frac{1+2y}{3} = z+2$ と、点 $(1,3,-1)$。

2. 点 $(1,-1,2)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線と、点 $(3,2,-1)$。

3. 二点 $(1,1,2), (2,-1,4)$ を通る直線と、点 $(1,2,-1)$。

問題 83　次の空間上の平面と点の距離をそれぞれ求めなさい。

1. 平面 $x-2y+3z=10$ と、点 $(1,-2,3)$。

2. 三点 $(1,-1,1), (2,1,1), (-1,2,-2)$ を通る平面と、点 $(2,1,-1)$。

3. 点 $(1,2,1)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直な平面と、点 $(2,-1,1)$。

問題 84　A, B を $(2,2)$ 行列とする。

1. $AB = BA$ ならば

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

となることを証明せよ。

2. $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ となるような行列 A, B の例を与えよ。

問題 85　座標平面を原点を中心にして θ 回転移動したとき、点 $P(x,y)$ の移る先の点を $P(x',y')$ とする。
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を対応させる写像 T は $\boldsymbol{R}^2$ から R^2 への線型写像であることを示せ。

問題 86　上と同様のことを、原点を通る直線に関する対称移動について示せ。

問題 87　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. $J^2 = -E$ であることを示せ。
2. $a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R}$ とする。このとき、次を示せ。ただし、i は虚数単位である。

$$(a + bi) + (c + di) = e + fi \;\Leftrightarrow\; (aE + bJ) + (cE + dJ) = eE + fJ,$$

$$(a + bi)(c + di) = e + fi \;\Leftrightarrow\; (aE + bJ)(cE + dJ) = eE + fJ.$$

3. $(4E - 3J)A = E$ となる行列 A を求めよ。
4. $(aE + bJ)(cE + dJ) = (cE + dJ)(aE + bJ)$ であることを示せ。

問題 88　次の二つの 3 行 3 列の行列 A, B と、ベクトル $\boldsymbol{x}$ について次の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. $A + B$ を求めなさい。
2. AB を求めなさい。
3. $A(B\boldsymbol{x})$ を求めなさい。
4. $(AB)\boldsymbol{x}$ を求めなさい。

問題 89　二次元平面上の点 (x, y) に対して、点 $(2x, -3y)$ を対応させるような二次元平面上の変換 T に対して、次の問に答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T に対して、$T = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。ただし、T_A は、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、$T_A(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ と、行列 A を用いて定義された変換の事である。
3. $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{v})$ に対して、$S(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ を満すような変換 S を、T の逆変換と呼び T^{-1} で表す。この時、変換 T^{-1} は、点 (x, y) をどのような点に対応させるか？
4. $T^{-1} = T_B$ を満す行列 B を求めなさい。
5. 行列 A と行列 B はどのような関係になっているか？