代幾 I 演習 (2005/06/16)

問題 90 行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, を満たすとき $A(-\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ を求めよ。

問題 91 $\boldsymbol{K}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線型結合で

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 &= 2\boldsymbol{v}_1 & +\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 &= & -2\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 &= 3\boldsymbol{v}_1 & +2\boldsymbol{v}_2 \end{cases}$$

と表されているとする。

1. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ をそれぞれ行列とベクトルの積で表せ。
2. 行列 $(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$ を行列と行列の積で表せ。

問題 92 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が、二つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}$ であることを示しなさい。
2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = |A|$ であることを示しなさい。
3. 2 行 2 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{y})$ と表されている (ただし、$a_{22} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい
4. 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような x を求めなさい。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 93 3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ が、三つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = a_{32} = a_{31} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$ であることを示しなさい。

2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |A|$ であることを示しなさい。

3. 3 行 3 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y} - \frac{a_{32}}{a_{33}}\boldsymbol{z}\ \boldsymbol{z})$ と表されている (ただし、$a_{33} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい。

4. 行列 $C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} u & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような u, v を求めなさい (このような、u, v の組は、一組とは限らないが、どれか一つを求めればよい。)。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 94　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 95　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 96　次の行列の行列式を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　8. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$　9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

問題 97　次の行列の行列式を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$　4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

問題 98　次の二つのベクトルに対して、その二つのベクトルの張る平行四辺形の面積を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 99

次の二つのベクトルに対して、ベクトル積 (外積) を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 100　次の三つのベクトルで張られる平行六面体の体積を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

問題 101　次の条件を満す、線型変換 T に対して、$T = T_A$ となるような 3 行 3 列の行列 A をそれぞれ、求めなさい。

1. $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
2. $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

問題 102　A, B, C を (m, n) 行列、c, d を複素数、O を (m, n) 型の零行列とした時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A + O = A, \quad A - A = O$

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $A+B=B+A$
4. $c(A+B)=cA+cB$
5. $(c+d)A=cA+dA$
6. $(cd)A=c(dA)$
7. $1A=A, \quad 0A=O$

問題 103　A, B を (l, m) 行列、C, D を (m, n) 行列、$O_{p,q}$ を (p, q) 型の零行列とする時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A(C+D)=AC+AD$
2. $(A+B)C=AC+BC$
3. $AO_{m,n}=O_{l,n}, \quad O_{l,m}C=O_{l,n}$

問題 104　行列 A の複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. $\overline{\overline{A}}=A$
2. $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$
3. $\overline{cA}=\overline{c}\overline{A}$
4. $\overline{(AB)}=(\overline{A})(\overline{B})$ (ヒント:この問題は講義でおこなった)

問題 105　行列 A の転置行列を ${}^tA$, 複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. ${}^t({}^tA)=A$
2. ${}^t(\,\overline{A}\,)=\overline{(\,{}^tA)}$
3. ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$
4. ${}^t(cA)=c\,{}^tA$
5. ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ (ヒント:この問題は講義でおこなった)