代幾 I 演習 (2005/06/23)

問題 106 T を 3 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^3$ から 2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^2$ への線型写像とし、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{K}^3$ の標準基底とする。

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ T(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ T(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

のとき次を計算せよ。

$$(1) \quad T(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}),\ (2) \quad T(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}),\ (3) \quad T(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}).$$

問題 107

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とした時、$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対し、$A\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を計算し、

$$A = (A\boldsymbol{e}_1\ A\boldsymbol{e}_2\ \cdots A\boldsymbol{e}_n)$$

となることを示せ。

問題 108 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ を $\boldsymbol{K}^4$ の標準基底とする。
$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような $(2, 4)$ 行列 A を求めよ。

問題 109

$$X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。区分けによる計算を用いて X^2, X^3, A^2, A^3, AX, XA を求めよ。

問題 110　次の行列 A, B のうち積 AB が可能なものはどれか。またそのとき AB の行の数、列の数はどうなるか。

1. A は $(2,4)$ 行列、B は $(2,3)$ 行列。
2. A は $(2,3)$ 行列、B は $(3,3)$ 行列。
3. A は $(3,1)$ 行列、B は $(3,3)$ 行列。
4. A は $(1,4)$ 行列、B は $(4,2)$ 行列。
5. A は $(3,1)$ 行列、B は $(1,2)$ 行列。
6. A は $(4,2)$ 行列、B は $(4,2)$ 行列。

問題 111　次の条件を満たす行列 A, B の例を作ってみよ。

1. 積 AB は定義できるが BA は定義できない。
2. AB, BA はどちらも定義できるが次数が異なる。
3. AB, BA はどちらも 2 次行列になるが、$AB \neq BA$ となる。
4. AB, BA はどちらも 2 次行列で、$AB = BA$ となる。

問題 112　次の計算をせよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

問題 113　$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ とする。行列の積の結合法則を利用して A^5 を計算せよ。

問題 114

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算を行いなさい。

1. AB,　2. BA,　3. AC,　4. CA,　5. AD,　6. DA

問題 115 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. J^2, J^3, J^4, J^5 を求めよ。
2. 二項定理を利用して $(E+J)^{10}$ を求めよ。

問題 116 次の図の様に、A 〜 O の間に道がある時に次の問に答えなさい。

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
A & - & - & B & & & C & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & \\
D & - & - & E & - & - & F & - & - & G & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & \\
 & & & H & - & - & I & & & | & J & - & - & K \\
 & & & | & & & & & & | & | & & & \\
 & & & | & & & & & & | & | & & & \\
 & & & L & - & - & - & - & - & M & N & - & - & O
\end{array}
$$

1. 行列 $X = (x_{\alpha\beta})$ (但し $\alpha =$ A 〜 O, $\beta =$ A 〜 O) とし、
$$x_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ と } \beta \text{ の間に道がある時}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$
と定める時 (例えば、A と B の間には道があるので x_{AB} は 1、A と C の間には道がないので、x_{AC} は 0 となる) の X を求めなさい。
2. $Y = (y_{\alpha\beta}) = X^2$ とした時に、$y_{\alpha\beta}$ の値は、どんな意味を持つか ?
3. D から、丁度 4 回、道を渡った時に到達する (但し、同じ場所や同じ道を何度通っても良いとする) ことができる場所はどことどこか ? また、その時、そこに到る道の種類は全部で何通りか ?

問題 117 演習書の p.10 の類題 4 を解きなさい。

問題 118 演習書の p.12 の類題 6 を解きなさい。

問題 119

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算をしなさい。
1. AB,　2. BA　3. A^2,　4. B^2

問題 120　以下の表は、各々の野菜に 1 kg 中に含まれる、様々な栄養素の含有量である。

食品名	エネルギー	たんぱく質	炭水化物	ビタミン C	鉄
アスパラガス・若茎	220	26	39	150	7
えだまめ	1350	117	88	270	27
グリーンピース	930	153	69	190	17
かぶ・葉	200	23	39	820	21
かぼちゃ	490	16	109	160	5

また、次の表は、食堂でのある一日の三食で消費された食材の量 (kg 単位) である。

食事	アスパラガス・若茎	えだまめ	グリーンピース	かぶ・葉	かぼちゃ
朝	2	0	1	0	0
昼	0	0	0	0	3
夜	0	2	0	0	0

これについて、以下の問いに答えなさい。

1. $A = (a_{\alpha\beta})$ に対して、$a_{\alpha\beta} =$ (食品 α が含む栄養素 β の含有量) と定めた時、A を求めなさい。
2. えだまめを 2kg, かぶを 3kg, かぼちゃを 1kg 食べた時のそれぞれの栄養の含有量を求めなさい。
3. 食堂での朝、昼、晩に消費された食材に含まれるたんぱく質と、ビタミン C の含有量を求めなさい。

問題 121　演習書の p.17 の類題 11 を解きなさい。

問題 122　演習書の p.73 の類題 2 を解きなさい。

問題 123

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の時、A^n を求めなさい。

問題 124　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.6 の類題 1 の 1. の (1)
2. p.6 の類題 1 の 1. の (2)
3. p.6 の類題 1 の 2.
4. p.6 の類題 1 の 3. の (1)
5. p.6 の類題 1 の 3. の (2)
6. p.6 の類題 1 の 3. の (3)

問題 125

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とした時に次の値を求めなさい。
1. A^2,　2. A^4,　3. A^{16},　4. A^{40}

問題 126　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.7 の類題 2 の 1. の X
2. p.7 の類題 2 の 1. の Y
3. p.7 の類題 2 の 2. の X
4. p.7 の類題 2 の 2. の Y
5. p.8 の類題 3 の A
6. p.8 の類題 3 の B
7. p.8 の類題 3 の C

問題 127　三つのベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を求めなさい。
2. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ の外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}$ を求めなさい。
3. $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{z}$ が作る平行四辺形の面積を求めなさい。
4. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が作る平行六面体の体積を求めなさい。
5. $\boldsymbol{x}$ に平行で、点 $(0, 0, 1)$ を通る直線の方程式を求めなさい。
6. $\boldsymbol{y}$ に垂直で、点 $(1, 1, 1)$ を通る平面の方程式を求めなさい。

問題 128　次の行列の計算をしなさい。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$