代幾 I 演習 (2005/06/30)

問題 129　$(3,2)$-行列 A に対し、5 次行列 B を

$$B = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$$

と定める。ただし、E_3, E_2 はそれぞれ 3 次と 2 次の単位行列である。

1. $B^2 = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & 2A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$ であることを示せ。
2. B^n を求めよ。
3. B は正則行列であることを示せ。

問題 130　(k,l) 行列 A, (l,m) 行列 B, (m,n) 行列 C に対し、${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$ となることを示せ。

問題 131　A, B, C を n 次正則行列とする。このとき、$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ。

問題 132　A を n 次正則行列とする。${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$ を用いて $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が成り立つことを示せ。

問題 133　A を n 次行列とする。この時、次の問に答えなさい。

1. A^2 が正則行列ならば、実は、A 自身も正則行列であることを示せ。
2. A が正則行列ならば、任意の整数 k に対して A^k も正則行列であることを示せ。

問題 134　A, B を次の様な形をした n 次対角行列とする。この時、次の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

1. 二つの行列の積 AB を求めなさい。
2. A が逆行列を持つ条件と、A がその条件を満す時の A の逆行列を求めなさい。

問題 135 n 次行列 A に対して $\mathrm{tr}(A)$ で、A の固有和 (trace:トレース) を表すとする ($A=\{a_{ij}\}$ の時、$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$)。この時、P が正則行列であれば、$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$ であることを示せ。

問題 136 A,B,X を n 次行列、E を n 次の単位行列とするとき、次の問に答えなさい。

1. A が正則ならば、$AX=B$ を満す行列 X は一意に決ることを示しなさい。
2. $E-A$ が正則ならば、$\sum_{i=0}^{k} A^i=(E-A^{k+1})(E-A)^{-1}$ であることを示しなさい。

問題 137 次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad 2.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad 3.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 138 次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1.\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad 2.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 139 n 次行列 $J_n=(\delta_{i,n-j+1})(1\leq i,j\leq n)$ (ただし、$\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタで、$\delta_{i,j}=\begin{cases} 1 & (i=j \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases}$ と定義されている) について、次の問に答えなさい。

1. n 次の正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して AJ_n を求めなさい。
2. n 次の正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して J_nA を求めなさい。
3. J_n は、正則行列であることを示し、その逆行列 J_n^{-1} を求めなさい。

問題 140 演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.1 を解きなさい。

問題 141 演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.2 を解きなさい。

問題 142 演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.9 を解きなさい。