代幾 I 演習 (2005/07/14)

問題 156　次の行列の階数 (rank) を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,　5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$,　6. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,　8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,　9. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 157　次の行列の Rank (階数) を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ y & 1 & x \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 158　演習書の p.105 の 類題 2 を解きなさい。

問題 159　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.10 の類題 10 の 1.
2. p.10 の類題 10 の 2. の (1)
3. p.10 の類題 10 の 2. の (2)

問題 160　次の行列を A とする。A に行に関する基本変形を行い階段型の行列 A' にせよ。またそのとき $A' = PA$ となるような正則行列 P を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,

問題 161

1. 正方行列 A の左右から正則行列 P, Q をかけたところ $PAQ = E$ となったとする。(ただし、E は単位行列である。) A は正則行列であることを示し、A^{-1} を P, Q を用いて表わせ。

2. 正方行列 A に行および列に関する基本変形を何回か施したところ単位行列になったとする。このとき、A は正則行列であることを示せ。

問題 162　次の行列が逆行列を持つかどうかを判定し，逆行列を持つときには逆行列を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　4. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} i & 1+i & -1 \\ 1-i & 2i & 2 \\ 1 & -1+i & 3i \end{pmatrix}$　6. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　7. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　10. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

問題 163　次の行列が逆行列を持つための α の条件を定めよ。またその時の逆行列は何か。

1. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2-\alpha & 3 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 164　次の行列を A としたとき PAQ が A の階数標準形になるように正則行列 P, Q を定めよ。

1. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

問題 165　次の行列を基本行列の積で表しなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$