代幾 I 演習 (2005/10/20)

集合 G の元 a, b に対し、**積**と称する第三の元（これを ab であらわす）が定まり、次の公理を満すとき、G は**群** (group) であるという (cf. 教科書 p.248 参照)。

1. $(ab)c = a(bc)$ (結合法則)
2. **単位元** と称する特別な元 e がただ一つ存在して、G の全ての元 a に対して $ae = ea = a$ が成立する。
3. G の任意の元 a に対して、$ax = xa = e$ となるような元 x が存在する。これを a の **逆元** と呼び a^{-1} で表す。

これを参考に次の問題を解きなさい。

問題 193　K（K は C(複素数) あるいは、R(実数) を考えている。）を成分とする n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K) = \{A | A$ は n 次正方行列$\}$ は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理をみたしていることをそれぞれ示せばよい。)。

問題 194　n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K)$ は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理の少くても一つは成立していないので、その成立していない公理を示し、どのような場合に成立していないかを述べればよい。。

問題 195　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n, K) = \{A | A$ は n 次の正方行列で、逆行列を持つ$\}$ は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 196　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n, K) = \{A | A$ は n 次の正方行列で、逆行列を持つ$\}$ は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 197　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 198　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 199　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい。

問題 200　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。