代幾 I 演習 (2005/10/27)

問題 201　n の置換の個数が、$n!$ [1] であることを示せ。

問題 202　n の置換全体の集合は、置換の合成に関して、群[2]になることを示せ。

問題 203　偶置換全体の集合[3]は、置換の合成に関して、群になる[4] ことを示せ。

問題 204　n の置換 σ は次のような互換の積で、一意に表すことができることを示せ。ただし、$p_i > q_i$, $p_i > p_{i+1}$, $k < n$ となる。

$$\sigma = (p_1, q_1)(p_2, q_2)..(p_k, q_k)$$

6 の置換の内、例えば、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

は、0 を 3 に、3 を 4 に、そして 4 を 0 に変換している。このように、n の置換の内 $k(\leq n)$ 個の要素を順番に入れ替えるような置換を、「巡回置換」と呼び、その入れ替える要素を並べて表す (上の例では、$(0,3,4)$ と表す)。また、入れ替える要素の個数を巡回置換の長さ (上の例では 3) と呼ぶ。置換は、循環置換の特別な場合 (すなわち $k = 2$ の場合) と考えることができる。

この時、次の問に答えよ。

問題 205　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ の逆置換が、再び、長さ k の逆置換になることを示しなさい。また、この時、その逆置換は、どのような形になるか ?

問題 206　長さ k の巡回置換の一つを σ とする。この時、置換の集合 $\{\sigma, \sigma^2(= \sigma\sigma), \sigma^3, .., \sigma^k\}$ が群になることを示しなさい。

問題 207　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ が、次のような $k+1$ 個の互換の積で表現できることを示しなさい。

$$(a_1, a_2, .., a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_2)(a_2, a_3)..(a_{k-1}, a_k)(a_1, a_k)$$

問題 208　任意の置換は、巡回置換の積で表現できることを示せ。

問題 209　行列式の定義に従って 4 次の行列式を求めなさい。

---

[1] $n!$ は n の階乗と呼び、$n! = n \times (n-1) \times .. \times 2 \times 1$ である。

[2] この群を「n 次の対称群」と呼び S_n で表します。

[3] 偶置換全体は、置換全体の部分集合になっている。このように、ある群の部分集合が、同じ演算に関して、やはり群をなす場合に、この部分集合を「部分群」と呼ぶ。すなわち、偶置換全体の集合は、置換全体の集合の部分群である。

[4] この群を「n 次の交代群」と呼び A_n で表します。