代幾 I 演習 (2005/11/10)

問題 210　次の等式を満たすように置換 τ を定めよ。

1. $a_{\sigma(1)3}a_{\sigma(2)4}a_{\sigma(3)2}a_{\sigma(4)1} = a_{\sigma\tau(1)1}a_{\sigma\tau(2)2}a_{\sigma\tau(3)3}a_{\sigma\tau(4)4}$

次の等式を満たすように置換 τ を σ を用いて表せ。

2. $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)} = a_{\tau(1)1}a_{\tau(2)2}a_{\tau(3)3}a_{\tau(4)4}$

[行列の冪と冪零]

行列 A に対して、A を k 回掛けた結果を A の k 回の冪 (巾) と呼び A^k で表す。特に、任意の行列に対して $A^0 = E$ (E は単位行列) と定める。

行列 A に対して、ある自然数 $k > 0$ が存在して $A^k = O$(O は零行列) である時、この行列 A は、冪（巾) 零行列と呼ぶ。また、冪零行列 A に対して、k より小さい数では、O にならないが、k で初めて、O になる時、この k を冪零行列 A の次数と呼ぶことにする。

問題 211

行列 A, B が共に冪零行列で、その次数が、それぞれ k, j とし、$AB = BA$ を満す時、次の問に答えなさい。

1. 二つの行列の積 AB が冪零行列であることを示し、その次数の最大値を k, j で表しなさい。
2. 二つの行列の和 $A + B$ が冪零行列であることを示し、その次数の最大値を k, j で表しなさい。

問題 212　A が冪零行列の時、e^A を次のように定義する[1]。

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

この時、次の問に答えなさい。

1. $e^O = E$ であることを示しなさい。ただし、O, E はそれぞれ、零行列、単位行列とする。
2. 行列 A, B が、$AB = BA$ を満すならば、e^A と e^B の積 e^Ae^B が $e^{(A+B)}$ になることを示しなさい。
3. e^A は正則であることを示しなさい。

[1]形式的には無限和だが、A が冪零なので、実質は有限和であることに注意

4. 正則な行列 Q に対して、$e^{(Q^{-1}AQ)} = Q^{-1}(e^A)Q$ を示しなさい。

問題 213　次のような n 次の正方行列 $J_n = \{\delta_{i,i-1}\}$ が冪零行列であることを示し、その次数を求めなさい。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[対称行列と交代行列]

n 次行列 A が $A =^t A$ をみたすとき A を対称行列といい、$A = -^tA$ をみたすとき A を交代行列という。

問題 214　行列 A が交代行列ならば、A の対角要素は 0 であることを示せ。

問題 215　行列 A が、対称行列かつ交代行列ならば、実は、A は、零行列 O であること示せ。

問題 216

1. 対称行列 A, B の和 $A + B$ も対称行列になることを示しなさい。
2. 交代行列 C, D の和 $C + D$ も交代行列になることを示しなさい。
3. 交代行列 C の二乗 C^2 は、対称行列になることを示しなさい。

問題 217

1. n 次行列 B の (i, j) 成分を b_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ とする。この時、次の行列の (i, j) 成分を求めよ。

$$1.\quad {}^tB, \quad 2.\quad B +^t B, \quad 3.\quad B -^t B.$$

2. n 次行列 B が与えられたとき $B +^t B$ は対称行列であることを示せ。また $B -^t B$ は交代行列であることを示せ。

問題 218　正方行列 A は、対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを示せ。