代幾 I 演習 (2005/11/17)

問題 219　行列 A が冪零行列ならば、$|A| = 0$ を示せ。

問題 220　演習書の p.13 の 1 章の類題 7 を解きなさい。

問題 221　演習書の p.13 の 1 章の類題 8 を解きなさい。

問題 222　次の基本行列の行列式を求めなさい。

1. $P_n(i,j)$,　2. $Q_n(i;c)$,　3. $R_n(i,j,c)$.

問題 223　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.3 を解きなさい。

問題 224　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.4 を解きなさい。

問題 225　正則行列は基本行列の積で表すことができることと，$|AB| = |A||B|$ を用いて正則行列の行列式は 0 ではないことを示せ。

問題 226　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.5 を解きなさい。

問題 227　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.6 を解きなさい。

問題 228　実行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ に対し、次の行列式を求めよ。

1. $\det X$,　2. $\det(E - X)$.

問題 229　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.8 を解きなさい。

問題 230　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.10 を解きなさい。

問題 231　次の行列式を因数分解せよ。

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$,　2. $\begin{vmatrix} x & i & 1 & -i \\ -i & x & i & 1 \\ 1 & -i & x & i \\ i & 1 & -i & x \end{vmatrix}$

問題 232　演習書の p.75 の 5 章の類題 4 を解きなさい。

問題 233　演習書の p.76 の 5 章の類題 5 を解きなさい。

問題 234　次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} na_1+b_1 & na_2+b_2 & na_3+b_3 \\ nb_1+c_1 & nb_2+c_2 & nb_3+c_3 \\ nc_1+a_1 & nc_2+a_2 & nc_3+a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2-n+1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

問題 235　演習書の p.78 の 5 章の類題 6 を解きなさい。

問題 236　演習書の p.80 の 5 章の類題 7 を解きなさい。

問題 237　次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

問題 238

1. A が直交行列ならば $\det A = \pm 1$ であることを示せ。
2. A がエルミート行列ならば $\det A$ は実数であることを示せ。
3. A がユニタリ行列ならば $\det A$ は絶対値が 1 の複素数であることを示せ。

問題 239　$\det {}^t\!A = A$ と $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ を用いて $\det A^* = \overline{\det A}$ を証明せよ。

問題 240　A を 3 次行列とする。このとき次の行列の行列式の値を $|A|$ を用いて表わせ。

$$1.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad 2.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3.\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}A,\quad 4.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$5.\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$