

代幾 I 演習 (2005/11/24)

問題 241 冪零行列¹ は正則でないことを示せ。(ヒント: A が正則ならば $|A| \neq 0$ であることと、 $|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 242 演習書の p.83 の 5 章の問題 5.1 を解きなさい。

問題 243 演習書の p.83 の 5 章の問題 5.2 を解きなさい。

問題 244 直交行列² A の行列式 $|A|$ の値を求めよ。(ヒント: $|E| = 1$, $|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 245 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.9 を解きなさい。

問題 246 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.10 を解きなさい。

問題 247 二つの多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g(x) = px^2 + qx + r$ に対して、次の行列式 $R(f, g)$ をこの二つの多項式の終結式と呼ぶ。

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}$$

この時、「二つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が同じ根を持つこと」と、「 $R(f, g) = 0$ が成立すること」が必要十分条件になっていることを示せ。

問題 248 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.11 を解きなさい。

問題 249 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.12 を解きなさい。

問題 250 次の行列式を因数分解しなさい。

1.

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

¹ A が冪零行列であることの定義は、ある自然数 n が存在し、 $A^n = O$ (ただし、 O は零行列) となることである。

² A が直交行列であることの定義は、 ${}^tAA = E$ となることである。