

代幾 I 演習 (2005/12/08)

問題 274 A 君, B 君, C 君, D 君, E 君の 5 人は、それぞれ自分のホームページを作成し、互いに見せあって、自慢することにした。そして、もし、自分以外の人ホームページを見て、これは面白いと思ったならば、自分のページにその面白いと思ったページへのリンクを作成することにした。

暫くして、各自のホームページも作成され、内容の評価が済み、その結果として、次のようなリンクが行われた (A 君は E 君以外の三人のページにリンクをはったが A 君のページにリンクをしたのは E 君だけだった)。

リンク元 \ リンク先	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

その後、5 人は、誰のページが一番良いかを議論することになった。その結果、次のような結論¹ になった。

- もし、そのページが価値があるならば、他の人からリンクされているに違いない (リンクされているページは評価が高い)。
- そのリンクの価値は、リンク元の価値に比例するに違いない (価値のあるページからリンクされるページは評価が高い)。
- そのリンクは価値は、リンク元のリンク量に反比例するに違いない (できるだけ価値のあるページだけをリンクする)。

この結論を、5 人のホームページの評価を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ととして、関係式で表現すると次のようになった。

$$\begin{cases} x_1 = & & & & \frac{1}{1}x_5 \\ x_2 = & \frac{1}{3}x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & \\ x_3 = & \frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 \\ x_4 = & \frac{1}{3}x_1 & & & \\ x_5 = & & \frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

この時、次の問いに答えなさい。

¹cf. Google の人気の秘密 (http://www.google.co.jp/intl/ja/why_use.html)

- 縦ベクトル $\vec{x} = (x_i)$ を考え、上記の関係式を行列とベクトルを用いて表すと、 $\vec{x} = A\vec{x}$ となる。このような行列 A を求めなさい。
- A^n を求めなさい。
- $x_0 = {}^t(1, 0, 0, 0, 0)$ とし、 $x_{n+1} = Ax_n$ とすると、 $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ が収束することを示しなさい。
- x_∞ は、 $x_\infty = Ax_\infty$ を満たすことを示しなさい。
- この評価法で、A 君から E 君の内、一番評価が高いのは誰のページか。

問題 275 n 次の正方行列 A が確率行列² で、 n 次の縦ベクトル \vec{p} が確率ベクトル³ の時、 $A\vec{p}$ もまた、確率ベクトルになること示せ。

問題 276

8 つの部屋 (1 から 8 の数字が振られている) があり、その何れかの部屋に人がいるとする (下の例では、現在 5 番目の部屋に人がいる)。

1	2	3	4	5	6	7	8

一日に一度、コイン⁴を投げ、表が出れば左の部屋へ、裏が出れば右の部屋に移るとする。ただし、移動先がない場合⁵は、その部屋に留まるとする。

この時、次の問いに答えなさい。

- 本日、 i 番目の部屋にいる確率を $\vec{p} = (p_i)$ 、次の日に i 番目の部屋にいる確率を $\vec{q} = (q_i)$ とした時 $\vec{q} = A\vec{p}$ となるような行列 A を求めなさい。
- 初日は、1 番目の部屋にいた (即ち $\vec{p}_1 = (p_{1i})$ の時、 $p_{11} = 1, p_{1i} = 0 (i = 2, \dots, 8)$ となる) とすると、4 日目 (即ち、3 度コインを投げる) に、再び、部屋 1 に居る確率を求めなさい。
- A^n を求めなさい。
- \vec{p}_0 を確率ベクトルとし、確率ベクトルの列 $\{\vec{p}_n\}$ を、 $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n$ で定義すると、最初の確率ベクトル \vec{p}_0 に拘らず、このベクトル列が収束することを示しなさい。

²行列 $A = (a_{ij})$ が確率行列であることの定義は、その成分が非負で、しかも、その全ての行において、成分の和が 1 になること、即ち $a_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 (i = 1..n)$ であることを言う。(cf. 教科書 p.73)

³ $\vec{p} = (p_i)$ が確率ベクトルであることの定義は、その成分が、全て非負で、かつ、その和が 1 となることである。即ち、 $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ の場合を言う。

⁴このコインは、歪んでおらず、投げると正確に $\frac{1}{2}$ の確率で表があるいは裏のどちらかが出るとする。

⁵1 番目の部屋で表が出た場合と、8 番目の部屋で裏が出た場合