代幾 I 演習 (2005/12/15)

問題 277

1. A, B が n 次正方行列の時、次の式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{vmatrix} = 4^n|A||B|$$

2. 次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b-c-d & a-b+c-d & a-b-c+d \\ a+b-c-d & a+b+c+d & a-b-c+d & a-b+c-d \\ a-b+c-d & a-b-c+d & a+b+c+d & a+b-c-d \\ a-b-c+d & a-b+c-d & a+b-c-d & a+b+c+d \end{vmatrix}$$

問題 278 $f(x) = a\cos x + b\sin x$ という形をした関数全体の集合を $F(= \{a\cos x + b\sin x | a, b \in R\})$, 二次元の実ベクトルの集合を $V(= \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in R\})$ で、それぞれ表すとする。この時に次の問いに答えなさい。

1. $f(x) \in F$ ならば、f を微分した $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ も F の要素であることを示せ。
2. 上記の F 上の変換 $D(f) = f'$ は、全単射であることを示せ。
3. $f(x) = a\cos x + b\sin x \in F$ に対して、二次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$ を対応させる写像 $v = \varphi(f)$ を考える。すると、この写像 $\varphi(f)$ は、全単射であることを示せ。
4. V 上の変換 $\bar{D}(v) = \varphi(D(\varphi^{-1}(v)))$ が全単射であることを示せ。
5. 上記の変換 $\bar{D}$ には、ある 2×2 の実行列 A_D があり、$\bar{D}(v) = A_D v$ と表現できることを示せ。
6. 変換 D の逆変換を S とすると、上記と同様に定義される $\bar{S} = \varphi(S(\varphi^{-1}(v))$ も、ある行列 A_S があり、$S(v) = A_S v$ となることを示せ。
7. A_S は、A_D 逆行列であることを示せ。
8. 上記の性質を利用して、F 上の微分方程式 $f'(x) = \cos x + \sin x$ の解の内、F に含まれるものを求めよ。
9. 同様にして F 上の微分方程式 $f''(x) + 2f'(x) = \cos x$ の解の内 F に含まれるものを求めよ。