代幾 I 演習 (2006/01/12)

問題 279　$f(x) = a\cos x + b\sin x + ce^{-x}$ という形をした関数全体の集合を $F(= \{a\cos x + b\sin x + ce^{-x} | a, b, c \in R\})$, 三次元の実ベクトルの集合を $V(= \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} | a, b, c \in R\})$ で、それぞれ表すとする。この時に次の問いに答えなさい。

1. $f(x) \in F$ ならば、f を微分した $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ も F の要素であることを示せ。
2. 上記の F 上の変換 $D(f) = f'$ は、全単射であることを示せ。
3. $f(x) = a\cos x + b\sin x + ce^{-1} \in F$ に対して、三次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ を対応させる写像 $v = \varphi(f)$ を考える。すると、この写像 $\varphi(f)$ は、全単射であることを示せ。
4. V 上の変換 $\bar{D}(v) = \varphi(D(\varphi^{-1}(v)))$ が全単射であることを示せ。
5. 上記の変換 $\bar{D}$ には、ある 3×3 の実行列 A_D があり、$\bar{D}(v) = A_D v$ と表現できることを示せ。
6. 変換 D の逆変換を S とすると、上記と同様に定義される $\bar{S} = \varphi(S(\varphi^{-1}(v))$ も、ある行列 A_S があり、$S(v) = A_S v$ となることを示せ。
7. A_S は、A_D 逆行列であることを示せ。
8. 上記の性質を利用して、F 上の微分方程式 $f'(x) = \cos x + \sin x + e^{-x}$ の解の内、F に含まれるものを求めよ。
9. 同様にして F 上の微分方程式 $f''(x) + 2f'(x) = \cos x + e^{-x}$ の解の内 F に含まれるものを求めよ。