

代幾 I 小テスト (2005/10/13) 問題 [注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように!!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 答えは「解答用紙」の所定の位置に記入してください(裏面もあります)。計算問題は、「答のみ」を記入してください。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それを見て、「自分で採点」の上、その結果を(当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

1 基本変形と基本行列

次の行列 A を行列 B に基本変形するには、どのような基本行列を左右のどちらからかければよいかをそれぞれ答えなさい。

Q.1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 1 \\ 8 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 28 & 5 & 12 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2 階数 (Rank) の計算

次の行列の階数 (Rank) をそれぞれ求めなさい。

Q.1

$$\begin{pmatrix} -8 & -2 & 8 \\ -8 & -2 & 8 \\ 8 & 2 & -8 \\ 8 & 2 & -8 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

3 逆行列

次の行列の逆行列を求めなさい。

Q.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

4 連立方程式

次の連立方程式を解きなさい。

Q.1

$$\begin{cases} x_0 + 2x_1 - 5x_2 = -42 \\ -x_0 + 2x_1 - 2x_2 = -13 \\ x_0 - 3x_1 + 4x_2 = 29 \end{cases}$$

Q.2

$$\begin{cases} -x_0 & -x_2 = 1 \\ & x_1 = 5 \\ 2x_0 - 4x_1 + 2x_2 = -22 \end{cases}$$

Q.3

$$\begin{cases} -3x_0 + x_1 + x_2 = 16 \\ -x_0 + 2x_1 - 3x_2 = 10 \\ 3x_0 - 2x_1 + x_2 = -19 \end{cases}$$

5 証明

次の問題をそれぞれ解きなさい。

Q.1 複素数 z が実数であるための必要十分条件は $z = \bar{z}$ であることを示せ。ただし、 \bar{z} は、複素数 z の共役複素数である (すなわち、 $z = x + yi$ ならば $\bar{z} = x - yi$ である)。

Q.2 2次元の正方行列 A と、平面上のベクトル v, u と実数 c について、次の線型性が成立することを成分表示を用いて証明しなさい。

(a) $A(cv) = cAv$

(b) $A(v + u) = Av + Au$

Q.3 次の等式を証明しなさい。

$$1 + r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + \dots + r^{n-1} \cos (n-1)\theta = \frac{1 - r \cos \theta + r^{n-1} \cos (n-1)\theta - r^n \cos (n-1)\theta}{r^2 - 2r \cos \theta + 1}$$