代幾 I 小テスト (2006/01/19) 問題

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 答案は「解答用紙」の所定の位置に記入してください (裏面もあります)。計算問題は、「答のみ」を記入してください。

1 階数 (Rank) の計算

次の行列の階数 (Rank) をそれぞれ求めなさい。

Q.1

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -4 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -9 & 0 \\ -3 & 5 & 3 & 4 & -3 \\ 3 & -8 & -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2　逆行列

次の行列の逆行列を求めなさい。

Q.1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3　連立方程式

次の連立方程式を解きなさい。

Q.1

$$\begin{cases} x_0 - 6x_1 - x_2 + 5x_3 = -24 \\ -4x_0 + 2x_1 - x_2 - x_3 = 26 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_0 + 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

Q.2

$$\begin{cases} -2x_0 + x_1 - 2x_3 = -6 \\ 2x_0 - x_1 + 2x_3 = 6 \\ x_0 + x_2 = 3 \\ -2x_0 + x_1 - 2x_3 = -6 \end{cases}$$

Q.3

$$\begin{cases} 2x_0 - 6x_2 - 2x_3 = 5 \\ -2x_0 - x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -6 \\ 5x_0 + 2x_1 - 11x_2 - 5x_3 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

4　行列式

次の行列の行列式をそれぞれ求めなさい。

Q.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 4 & -3 \\ -3 & -2 & 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

5　証明

次の問題をそれぞれ解きなさい。

Q.1 次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Q.2 A, B が n 次正方行列の時、次の式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{vmatrix} = 4^n|A||B|$$

Q.3 A を n 次正方行列とする。この時 $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ が成立することを示せ。ただし、$\tilde{A}$ は、行列 A の**余因子行列**[1] を指す。

証明問題のヒント

証明問題を解く場合に、以下の証明の□の中を埋めたものを解答としてもよい (以下のヒントをまるっきり、無視して、自分なりの解答を記述してもよいし、一部だけを参考にしてもよい)。

Q.1 三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を、それぞれ次のようにおく。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} \\
&= \det(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boxed{}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) \\
&= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boxed{}) + \det(\boxed{}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) \quad &&(\text{行列式の多重線型性より}) \\
&= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + \\
&\quad \boxed{} + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) + \\
&\quad \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + \\
&\quad \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) &&(\text{同様にして}) \\
&= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + 0 + &&(\text{同じ列ベクトルを含む行列式は 0 なの} \\
&\quad \boxed{} + \boxed{} + &&(\text{同様にして}) \\
&\quad 0 + 0 + &&(\text{同様にして}) \\
&\quad 0 + \boxed{} &&(\text{同様にして}) \\
&= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (-1)^2 \boxed{} &&(\text{行列式の}\boxed{}\text{より}) \\
&= 2\boxed{} \\
&= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

[1] 教科書 p.87

Q.2

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \begin{vmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{vmatrix} \\
&= \boxed{\qquad} && \text{(一行目を二行目に加えた)} \\
&= \begin{vmatrix} 2B & A-B \\ 0 & 2A \end{vmatrix} && \text{(一列目から}\boxed{\qquad}\text{)} \\
&= \boxed{\qquad} \cdot |2A| && \left(\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \boxed{\qquad}\text{なので}^{2} \right) \\
&= \boxed{\qquad} && (|cA| = \boxed{\qquad}\text{なので}) \\
&= (2^n)(2^n)|A||B| \\
&= 4^n|A||B| \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

Q.3 行列 A が、正則 ($|A| \neq 0$) の場合とそうでない場合で場合わけし、いずれの場合も成立することを示す。

正則でない場合 A が正則でない場合は、$|A|, |\tilde{A}|$ は共に 0 となる。$|A|$ が正則でない場合、$|\tilde{A}| = 0$ になる理由は以下の通りである。

A が O(零行列) である場合とそうでない場合に、場合分けを行う。

$A = O$ の時 $\tilde{A}$ の i, j 要素は、A の $\boxed{\qquad}$ であり、これは、その要素が、元の A の要素からなる $\boxed{\qquad}$ である。ところが、$A = O$ なので、行列 A の要素 $a_{i,j}$ は全て $\boxed{\qquad}$ である。したがって、A の小行列の要素も当然 0 となり、その行列式も、全て 0 となる。よって、$\boxed{\qquad}$ の要素が、全て 0 となり、$\tilde{A}$ 自身が、$\boxed{\qquad}$。したがって、$|\tilde{A}| = 0$ となる。

$A \neq O$ の時 背理法によって、$\boxed{\qquad}$ が正則でないことを示す。

今、仮に、$\boxed{\qquad}$ が、正則であると仮定する。すると、$\tilde{A}$ の逆行列 $\tilde{A}^{-1}$ が存在する。教科書 p.88 系 [3.3] より、$\boxed{\qquad}$ が成立するので、これより、両辺に $\tilde{A}^{-1}$ を掛けて、$A = \boxed{\qquad}$ となる。ところが、A は、正則でないので、$|A| = 0$ である。これより、$A = 0 \cdot \tilde{A}^{-1} = \boxed{\qquad}$ となる。ところが、これは、$\boxed{\qquad}$ に矛盾する。すなわち、$\tilde{A}$ が正則だと仮定することによって、矛盾が導かれたので、$\tilde{A}$ が正則でないことが解る。

以上により、$\tilde{A}$ が正則でないので、$|\tilde{A}| = 0$ である。

$A = O$ の場合も、そうでない場合も、いずれの場合も $|\tilde{A}| = 0$ を示すことができたので、A が正則でなければ、常に $|\tilde{A}| = 0$ である。

したがって、左辺 $= |\tilde{A}| = \boxed{} = 0^{n-1} = |A|^{n-1} =$ 右辺 となり、与えられた等式は成立する。

正則の場合 一般に、教科書 p.88 系 [3.3] より、$\boxed{}$が成立する。そこで、この両辺の行列式を取り、公式 $|AB| = \boxed{}, |cA| = \boxed{}$ を用いれば、$|A||\tilde{A}| = |A|^n|E| = \boxed{}$ が成立することが解る。ここで、A が正則ならば、$|A| \neq 0$ なので、この両辺を $|A|$ で割れば、$|\tilde{A}| = \dfrac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}$ となり、与えられた等式が成立する。

A が正則の場合もそうでない場合のいずれの場合でも、与えられた等式が成立するので、与えられた式は、常に成立する。