クラーメルの公式

栗野俊一 * <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

2007/01/22 版

1 クラメルの公式

定義 1 クラメルの公式
連立方程式が、n 個数の縦ベクトル $\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_n$ により、$A = (\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_n)$ で表される正則な係数行列 A と、定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を用い、*(式 1)* のように表されているとする。

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

この時、この連立方程式の j 番目の解 x_j は、次のように、係数行列 A の縦ベクトル $\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_n$ と、定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ からなる行列式を用いて、次の *(式 2)* のように表現できる。

(2) $$x_j = \frac{det(\boldsymbol{a}_1, .., \overset{\substack{j\ \text{番目} \\ \downarrow}}{\boldsymbol{b}}, .., \boldsymbol{a}_n)}{det(\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_j, .., \boldsymbol{a}_n)}$$

例えば、次のような連立方程式を考えてみよう。

(3) $$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

これをクラメルの公式を用いて答を求めると次のようになる。

*日本大学理工学部数学科

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{5} = 1$$

この公式は、一般の連立方程式を解く場合には、あまりにも計算効率が悪い[1]し、また、使ってもよい状況も限られている[2]ので、通常は、クラメルの公式ではなく、基本変形を利用するのだが、この公式の右辺に現れる行列式が、規則的な形をしており、行列式の計算が簡単にできる場合は、このクラメルの公式が活用できる可能性がある。

2 ヴァンデルモンド の行列式

クラメルの公式が活用できるのは、行列式の計算が簡単にできる場合である。ヴァンデルモンド の行列式もその様な、行列式の計算が容易な例である。

定義 2 ヴァンデルモンド の行列式

次の *(式 4)* で表される行列式をヴァンデルモンド の行列式と呼ぶ。また、この時、この行列式の値は差積となる。

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Delta(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

[1] 一般に、基本変形で連立方程式を解く場合の計算量は、ほぼ、係数行列の行列式の計算をする量程度である。ところが、クラメルの公式では、この係数行列の行列式と同じ量の計算を $n+1$ 回行う必要があるので、計算の量は、ほぼ $n+1$ 倍となる。

[2] クラメルは、解が一つ、すなわち、係数行列の行列式が 0 でない場合にしか利用できない。

3　ヴァンデルモンド の行列式とクラメルの公式

連立方程式の係数行列 A ならびに、定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ が、以下のような (式 5) の形で与えられているとする。

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \\ \vdots \\ b^{n-1} \end{pmatrix} \tag{5}
$$

すると、クラメルの公式から、この方程式の解は、次のようになる。

$$
x_j = \frac{\det(\boldsymbol{a}_1, .., \overset{\substack{j\text{ 番目} \\ \downarrow}}{\boldsymbol{b}}, .., \boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_j, .., \boldsymbol{a}_n)} \tag{6}
$$

これを、成分を用いて表現すると、次のようになる。

$$
x_j = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & b & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & b^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & b^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_j^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_j^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}} \tag{7}
$$

すなわち、分母分子が、両方共、バンデルモンド の行列式の形をしている。従って、これを差積の形に書き直せば、次のようになる。

$$
x_j = \frac{\Delta(a_1, a_2, .., a_{j-1}, b, a_{j+1}, .., a_n)}{\Delta(a_1, a_2, .., a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, .., a_n)} \tag{8}
$$

ここで、分母分子共に、b 並びに、a_j を、一番後に来るように、隣合う二つの要素を順番に交換して行く。この為に、$n-j$ 回の交換が必要となり、また、差積は、二つの要素を交換する度に、符号が変るので、結局、次の形になる。

$$
x_j = \frac{(-1)^{n-j}\Delta(a_1, a_2, .., a_{j-1}, a_{j+1}, .., a_n, b)}{(-1)^{n-j}\Delta(a_1, a_2, .., a_{j-1}, a_{j+1}, .., a_n, a_j)} \tag{9}
$$

符号は、分母分子共に、共通なので、約分でき、更に、差積の最後の項目だけを展開すると、次の様になる。

$$(10)\quad x_j = \frac{(a_n - b)(a_{n-1} - b)\cdots(a_{j+1} - b)(a_{j-1} - b)\cdots(a_1 - b)\Delta(a_1, a_2, .., a_{j-1}, a_{j+1}, .., a_n)}{(a_n - a_j)(a_{n-1} - a_j)\cdots(a_{j+1} - a_j)(a_{j-1} - a_j)\cdots(a_1 - a_j)\Delta(a_1, a_2, .., a_{j-1}, a_{j+1}, .., a_n)}$$

後半の差積は、約分できるので、結局、次の様な公式を得ることができる。

$$(11)\quad x_j = \frac{(a_n - b)(a_{n-1} - b)\cdots(a_{j+1} - b)(a_{j-1} - b)\cdots(a_1 - b)}{(a_n - a_j)(a_{n-1} - a_j)\cdots(a_{j+1} - a_j)(a_{j-1} - a_j)\cdots(a_1 - a_j)}$$

例えば、次のような、複素係数の連立方程式を考えてみよう。

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ix_2 & - & x_3 & = & -i \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

すると、この行列の拡大係数行列は次のようにあらわすことができる。

$$(13)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ (1)^2 & (i)^2 & (-1)^2 & (-i)^2 \end{pmatrix}$$

よって、上記の公式より、次の様にして解を求めることができる。

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & \dfrac{((i) - (-i))((-1) - (-i))}{((i) - (1))((-1) - (1))} & = & \dfrac{2i(i-1)}{-2(i-1)} & = & -i \\ x_2 & = & \dfrac{((1) - (-i))((-1) - (-i))}{((1) - (i))((-1) - (i))} & = & \dfrac{(1+i)(i-1)}{(1-i)(-i-1)} & = & 1 \\ x_3 & = & \dfrac{((1) - (-i))((i) - (-i))}{((1) - (-1))((i) - (-1))} & = & \dfrac{2i(1+i)}{2(i+1)} & = & i \end{array}$$