連立一次方程式の解法

栗野俊一 [*] <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

2006/10/22 版

1　n 元連立一次方程式

定義 1 (n 元連立一次方程式) n 元連立一次[1]方程式とは、次のような、n 個の変数 $x_1, .., x_n$ に対して、それぞれ、係数 $a_{i,j}$ を掛けて加えた結果に関する方程式[2]を m 個連立[3]させたもの *(式 1)* を指す。

$$
(1) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & d_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & d_2 \\
\vdots & & & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & d_m
\end{array} \right.
$$

例えば、次は、3 元の連立方程式の例である。

$$
(2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc}
3x_1 & - & 2x_2 & & & = & -1 \\
 & & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6
\end{array} \right.
$$

定義 2 (連立方程式の解) この連立方程式 *(式 1)* を解く ということは、この方程式を満すような値の組、すなわち、

$$
(3) \quad \left\{ \begin{array}{ccc}
x_1 & = & e_1 \\
x_2 & = & e_2 \\
 & \vdots & \\
x_n & = & e_n
\end{array} \right.
$$

となる、$e_1, .., e_n$ を求めることであり、これが、*(式 1)* を満す、すなわち、*(式 1)* に、*(式 3)* の結果を代入 *(* x_i に e_i を代入 *)* した、次の等式 *(式 4)* が全て成立しなければならない。

---

[*] 日本大学理工学部数学科

[1] (式 1) は見ての通り、変数 x_i に関する一次式になっている。

[2] 方程式というのは、二つの式を等号で結んだ式の事を呼ぶ。

[3] 変数の個数 n と方程式の本 (個) 数 m は別々に与えられる。高校までは、通常 $m = n$ の場合にしか扱わなかったが、大学では、n と m は完全に独立に与えられる。m と n だけからは、解の個数を予想することができないが、$m < n$ であれば確実に、一通りの解にはならないことは知っておいて良いであろう。

$$
(4)\quad \begin{cases} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n = d_1 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n = d_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \quad = \vdots \\ a_{m1}e_1 + a_{m2}e_2 + \cdots + a_{mn}e_n = d_m \end{cases}
$$

ただし、このような e_i の組み合わせが存在しない可能性もあるし、また、e_i が何らかのパラメータ変数を含む**定数でない式** である可能性もあることに注意。

実際に、(式 2) を解いた場合の答は、次の通りになり、

$$
(5)\quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}
$$

これを実際に、(式 2) を代入した結果は、以下の通りになる。

$$
(6)\quad \begin{cases} 3\times 1 - 2\times 2 = -1 \\ 2\times 2 - 3 = 1 \\ 1 + 2 + 3 = 6 \end{cases}
$$

これは、全ての等式が成立しており、この結果、少くても、(式 5) が (式 2) の解の一つである[4] ことが確認できる。

2 方程式の解法の概要と注意点

連立方程式解くための大まかな手順と、その手順に於ける注意点は次の通りである。手順の詳細と、具体的な注意点の内容に関しては、後述するが、手順の流れと、注意すべき点を予め把握しておく。

1. 与えられた方程式から拡大係数行列を作る。
2. 拡大係数行列を標準化する。
   (a) 標準化の対象は、係数行列部分である (すなわち、最右の列は標準化の必要はない)。
   (b) 基本操作は、可能な限り、行の操作で行う。
   (c) やむを得ない場合は、列の交換を行う。但し、最右の列 ($n+1$ 列目) は交換してはいけない。
   (d) 列の交換を行った場合は、最後に答えを作成するために必要なので記録しておく。
3. 標準化された結果を用いて、解の分類を行う。
   (a) 係数行列の rank r が変数の個数 n より小さい場合は、解が一意に定まらない。この時、高校までは、「解は不定」でよかったが、大学では、「解をパラメータで表記」しないといけない点が異なることに注意。

[4]逆に言えば、この結果を見ただけでは、「他には解がない」ということは「確認できない」ことになる。「(式 1) を解く (答を求める)」ということは、「(式 1) を満すような**全ての解**を求める」ことであることに注意しよう。

4. 解の形に合せて、答を作成する。
   (a) 拡大係数行列を標準化する場合に、もし、列の交換を行った場合は、その交換に従って、変数名の置き換えが必要になるので、標準化の時の交換の記録に従い、変数の名前の交換を行う必要がある。
5. 最後に、与えられた答を、元の方程式に代入して、確かに、解になっていることを確認する。

3 方程式の解法の詳細

3.1 拡大係数行列

与えられた方程式 (式 1) を解く最初の手順は、拡大係数行列を作成することである。この作業は、単純で、簡単にいえば、方程式の中から、変数 x_i と、等号 ($=$)、そして、加法の記号 ($+$) を取り除いたものである (ただし、$-$ は、係数の符号と考え、また、変数が現れない場合は、係数 0 があると扱う。)。

$$(7)\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & d_m \end{pmatrix}$$

拡大係数行列は、係数部分 (a_ij) と、定数部分 (d_i) からなるので、これを区別を容易するために、区切の縦線を入れてあるが、行列としては、この縦線を無視しても良い。

例えば、(式 2) に対応する拡大係数行列は、次のようになる。

まず、与えられた連立方程式を、式中に現れない変数に関しては、0 の係数を補い、引き算の部分は、負数の係数を持つ形にし、全て明示的に係数が指定された n 個の変数を含む加算の形にする。

$$(8)\quad \begin{cases} 3 & x_1 & + & (-2) & x_2 & + & 0 & x_3 & = & -1 \\ 0 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & (-1) & x_3 & = & 1 \\ 1 & x_1 & + & 1 & x_2 & + & 1 & x_3 & = & 6 \end{cases}$$

後は、変数と、$+, =$ の記号を取り除いて、両辺をかっこで囲めば、拡大係数行列となる。

$$(9)\quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

3.2 拡大係数行列の標準化

3.2.1 標準化での留意点

次の作業は、拡大係数の標準化を行う。この標準化に当っては、次の点に注意する。

1. 標準化の対象は、係数部分のみ (最右の列以外の部分。最右の列は、他の要素と一緒に **操作はする** が、**標準化する** 必要はない)。

2. 操作は、可能な限り行の操作で行う。

3. 行の操作だけでは標準化できない場合のみ、行の交換 を行う。ただし、最右の列は交換してはいけない。

4. 列の交換を行った場合は、最後に答を作る場合に必要なので、記録しておく。

3.2.2 標準化の実例

(式 2) の場合

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

一行目と二行目を交換
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & -2 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

三行目から一行目の 3 倍を引く
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & -3 & | & -19 \end{pmatrix}$$

三行目の二倍目の 2 倍を加える
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -5 & | & -17 \end{pmatrix}$$

ニ行目と三行目を交換
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -1 & -5 & | & -17 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

ニ行目に (-1) をかける
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 5 & | & 17 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

一行目からニ行目を引く
三行目からニ行目の 2 倍を引く
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & | & -11 \\ 0 & 1 & 5 & | & 17 \\ 0 & 0 & -11 & | & -33 \end{pmatrix}$$

三行目を (-11) でわる。
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & | & -11 \\ 0 & 1 & 5 & | & 17 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

一行目に三行目の 4 倍を加える
二行目から三行目の 5 倍を引く
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

標準化終了

この例では、列の操作は一切、行っていない。また、最右の列は、標準化の対象ではないので、これ以上の操作は不要である。

3.3 解の分類

拡大係数行列の標準化が済んだら、次は、その標準化された拡大係数行列の形に基き、解の形の分離を行う。

3.3.1 標準化された拡大係数行列の一般形

(式 1) の拡大係数を標準化した場合の一般的な形は次のようになる。

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{1,r+1} & \cdots & p_{1,n} & f_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{2,r+1} & \cdots & p_{2,n} & f_2 \\
 & 0 & 1 & & 0 & p_{3,r+1} & \cdots & p_{3,n} & f_3 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\
 & & & & 1 & p_{r,r+1} & \cdots & p_{r,n} & f_r \\
0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{r+1} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_m
\end{pmatrix}
$$

あるいは、区分けを使って、

$$
\begin{pmatrix}
E_r & | & P_{r,n-r} & | & f_r \\
--- & + & --- & + & --- \\
O_{m-r,r} & | & O_{m-r,n-r} & | & g_{m-r}
\end{pmatrix}
$$

ここで、$E_r(r \geq 0)$ は、r 次元の単位行列、$O_{i,j}$ は、i 行 j 列の零行列、$A_{i,j}$ は、i 行、j 列の行列、f_i, g_i は、i 次元の縦ベクトルである。

(式 2) の場合は、

$$
\begin{array}{ccccc}
E_r & = & E_3 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P_{r,n-r} & = & P_{3,0} & = & \text{なし} \\
f_r & = & f_3 & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
O_{m-r,r} & = & O_{0,3} & = & \text{なし} \\
O_{m-r,n-r} & = & O_{0,0} & = & \text{なし} \\
g_{m-r} & = & g_0 & = & \text{なし}
\end{array}
$$

となっている。

3.3.2 解の形の分類と判定方法

解の形の分類と判定方法は次のようになっている。

$$
\begin{cases}
f_{m-r}\text{が 0 ベクトルでない} & & \cdots & \text{解なし} \\
f_{m-r}\text{が 0 ベクトル} & \begin{cases} r < n \\ r = n \end{cases} & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{l} \text{解は無数にある} \\ \text{解は一通り} \end{array}
\end{cases}
$$

3.4 答の形式

答の形式は、前節の解形によって異なる。

3.4.1 解なしの場合

この場合は、高校までと同様、「解なし」あるいは、「不能」[5] でよい。

3.4.2 解が無数にある場合

この場合、高校では、「不定」と答えて、よかったが、大学では、これは許されない。大学では、この場合、パラメータ形式で答える必要がある。

もし、この段階で、「不定」と答た場合は、答が殆んどできているにも関らず、ほぼ 0 点しかつかない。

具体的には、まず次の形で一旦、形式的に答を作る。

$$
\left\{
\begin{array}{ccc}
x_1 & = & f_1 - p_{1,r+1}\alpha_{r+1} - p_{1,r+2}\alpha_{r+2} - \cdots - p_{1,n}\alpha_n \\
x_2 & = & f_2 - p_{2,r+1}\alpha_{r+1} - p_{2,r+2}\alpha_{r+2} - \cdots - p_{2,n}\alpha_n \\
 & \cdots & \\
x_r & = & f_r - p_{r,r+1}\alpha_{r+1} - p_{r,r+2}\alpha_{r+2} - \cdots - p_{r,n}\alpha_n \\
x_{r+1} & = & \alpha_{r+1} \\
 & \cdots & \\
x_n & = & \alpha_n
\end{array}
\right.
$$

$\alpha_{r+1} \sim \alpha_n$ はパラメータ変数となる。

更に、もし、途中で、列の操作をおこなっており、i 列目と j 列目を交換した場合は、x_i と x_j の変数だけを交換する (右辺の式はそのまま)。これを、列の操作をおこなった回数[6]だけ、繰り返す。

この変数の交換を行わないと、結果的に答は誤りであり、点数は半減するということを覚悟する必要がある。

3.4.3 解が一つの場合

この場合は、高校の時と同様、次のような形で、定数値が答となる。

$$
\left\{
\begin{array}{ccc}
x_1 & = & f_1 \\
x_2 & = & f_2 \\
 & \cdots & \\
x_n & = & f_n
\end{array}
\right.
$$

ただし、上記と同様に、もし、途中で、列の操作をおこなっており、i 列目と j 列目を交換した場合は、x_i と x_j の変数だけを交換する (右辺の式はそのまま)。これを、列の操作をおこなった回数だけ、繰り返す。

この変数の交換を行わないと、結果的に答は誤りであり、点数は半減するということを覚悟する必要がある。

[5]これを、時々「不定」と書く学生がいるが、これは当然、(大学でも、高校でも) 誤りである。また、高校時代には、次に述べるように「不定」が正解となる場合があるが、大学では、それでは不十分である。すなわち、「大学の場合は、『不定』が答になることはない (『不定』と書いたら常に誤り)」と言える。

[6]もし、可能な限り、行の操作だけを使い、列の操作を最小限度にした場合、どの変数も、たかだか一度しか交換されないはずである。もし、同じ変数を二度以上交換する必要がある場合は、標準化に戻って、考え直す必要がある。