代幾 I 演習 (all)

問題 1

複素数 α, β に対して、次の等式が成立することを示しなさい。

1. $\mathrm{R}e(\alpha \pm \beta) = \mathrm{R}e(\alpha) \pm \mathrm{R}e(\beta)$
2. $\mathrm{I}m(\alpha \pm \beta) = \mathrm{I}m(\alpha) \pm \mathrm{I}m(\beta)$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
4. $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$

問題 2　複素数 α_1, α_2 がそれぞれ、極形式

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \\
\alpha_2 &= r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))
\end{aligned}
$$

で表されているとする。この時、次の等式が成立することを示しなさい。

1. $\alpha_1/\alpha_2 = (r_1/r_2)(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$
2. $\alpha_1^n = r_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))\ (n \in \boldsymbol{N})$

問題 3　複素数 $z = x + iy$ に対して、e^z を次のように定義する。

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

この時、次の等式が成立することを示しなさい。

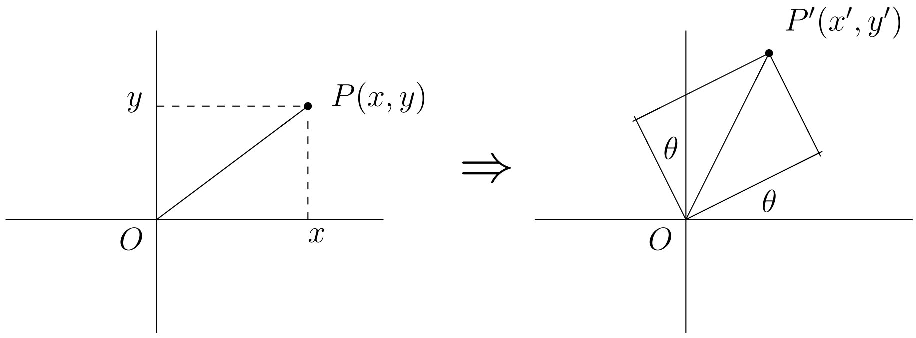
1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
2. $e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}$
3. $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}\ (n \in \boldsymbol{N})$

問題 4

1. 座標平面上の点 $P(x, y)$ を y 軸に関し対称移動した点の座標を x, y を用いて表せ。
2. 座標平面上の点 $P(x, y)$ を 直線 $y = x$ に関し対称移動した点の座標を x, y を用いて表せ。

3. 座標平面上の点 $P(x,y)$ を 原点に関し対称移動した点の座標を x,y を用いて表せ。

問題 5　座標平面上の点 $P(x,y)$ を原点を中心に θ 回転移動した点の座標を x,y,θ で表す式を、次の図を用いて導け。



問題 6　座標平面上の直線 $y = mx$ が x 軸となす角を θ とする。

1. m を θ を用いて表せ。
2. 座標平面上の点 $P(x,y)$ を 直線 $y = mx$ に関し対称移動した点の座標を x, y, m を用いて表せ。

問題 7　座標平面上の点 $P(x,y)$ を原点を中心に $-\theta$ 回転移動した点を $P_1(x_1,y_1)$, $P_1(x_1,y_1)$ を x 軸に関し対称移動した点を $P_2(x_2,y_2)$, $P_2(x_2,y_2)$ を原点を中心に θ 回転移動した点を $P'(x',y')$ とする。

1. x_1, y_1 を x, y, θ を用いて表せ。
2. x_2, y_2 を x_1, y_1 を用いて表せ。
3. x', y' を x_2, y_2, θ を用いて表せ。
4. x', y' を x, y, θ を用いて表せ。

問題 8　講義での複素数の演算の定義と実数の加法および乗法に関する性質を用いて、任意の複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\gamma = e + fi$ に対し次が成り立つことを証明せよ。式の変形の際には、複素数の演算の定義、実数の加法および乗法に関する性質のうちどれを用いた

かも示せ。

(1) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (加法についての結合法則)

(2) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (加法についての交換法則)

(3) $\alpha+0=\alpha$ (加法についての単位元)

(4) $\alpha+(-1)\alpha=0$

(5) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ (乗法についての結合法則)

(6) $\alpha\beta=\beta\alpha$ (乗法についての交換法則)

(7) $\alpha\cdot 1=\alpha$ (乗法についての単位元)

(8) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ (分配法則)

(9) $\alpha\delta=1$ となる複素数 δ が存在する。(ただし、$\alpha\neq 0$ の時) (乗法の逆元の存在)

問題 9 複素数の絶対値と共役複素数についての次の性質を証明せよ。

(1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$

(3) $\overline{\dfrac{1}{\alpha}}=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$

(4) $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$

(5) $|\overline{\alpha}|=|\alpha|$

(6) $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$

(7) $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$

(8) $\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|=\dfrac{1}{|\alpha|}$

問題 10

1. 複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\alpha=\overline{\alpha}$ であることを示せ。

2. 複素数 α が純虚数 (実部が 0 の複素数) であるための必要十分条件は $\alpha=-\overline{\alpha}$ であることを示せ。

問題 11 次の複素数は実数であることを示せ。

1. $\alpha+\overline{\alpha}$, 2. $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$, 3. $(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$.

問題 12

1. $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は実数であることを示せ。

2. $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は純虚数であることを示せ。

問題 13　実数 a,b,c,d についての等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

を複素数 α, β についての等式

$$|\,\alpha\,||\,\beta\,| = |\,\alpha\beta\,|$$

をもちいて導け。

問題 14　複素平面において α と β を表す点の間の距離は $|\,\beta-\alpha\,|$ であることを示せ。

問題 15　次の条件をみたす複素数 α の範囲を複素平面上に図示せよ。

1. $\alpha+\overline{\alpha}=2$,　2. $|\,\alpha+1\,|=2$,

3. $|\,\alpha-1\,|=|\,\alpha-i\,|$,　4. α^2 の偏角 $=\pi$.

問題 16　α, β, γ が複素数のとき,

$$\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

は複素平面上それぞれどのような点を表しているか。

問題 17　次の式をみたす複素数をすべて複素平面上に図示せよ。

1. $z^3=i$,　2. $z^5=-1$,　3. $z^2-z+1=0$,　4. $z^3=-1+i$.

問題 18　$z\neq 1$ の時に、等比数列の和の公式

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

を利用して、次の等式を示せ。ただし、$\theta\neq 2m\pi$ $(m=0,\pm1,\pm2,\dots)$ とする。

1. $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta = \dfrac{1-\cos\theta+\cos(n-1)\theta-\cos n\theta}{2(1-\cos\theta)}$

2. $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin(n-1)\theta = \dfrac{\sin\theta+\sin(n-1)\theta-\sin n\theta}{2(1-\cos\theta)}$

例題　ドモアブルの公式を用いて cos と sin の倍角公式を同時に求めてみよう。

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = e^{2i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

の右辺を展開すると，

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

を得る。両辺の実部と虚部はそれぞれ等しいので，

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

となり倍角公式が同時に得られた。

問題 19　　ドモアブルの公式を用いて、cos と sin の 3 倍角公式を求めよ。

問題 20

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を利用して，三角関数の積を和に直す公式，

   $$\cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}(\sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi))$$

   を証明せよ。

   (ヒント: 右辺の形に注目して $\frac{1}{2}(e^{i(\theta+\varphi)} - e^{i(\theta-\varphi)})$ を用いることを考えてみよ。)

2. $\cos\theta\cos\varphi$ の公式と $\sin\theta\sin\varphi$ の公式を同時に導いてみよ。

問題 21　　$r \neq 1$ であるような正の実数 r に対し、次の和を求めよ。

1. $1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^{n-1}\cos(n-1)\theta$

2. $r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + \cdots + r^{n-1}\sin(n-1)\theta$

問題 22　　互いに素な正整数 a, b と整数 $0 \leq r < a$ と $0 \leq s < b$ が与えられている。
　このとき、a で割ると r 余り、b で割ると s 余る整数で 0 以上 ab 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 23　　a, b の最大公約数を d とし，整数 x_0, y_0 は $ax_0 + by_0 = d$ を満すとする。このとき，$ax + by = d$ の整数解は整数 t を用いて

$$x = x_0 + \frac{bt}{d},\ y = y_0 - \frac{at}{d}$$

と書くことができることを示せ。

問題 24　$\alpha = 1 + i, \beta = 2 - i$ とする時、次の問に答えなさい。

1. 複素数 $\gamma = 4 + i$ を、二つの実数 a, b と複素数 α, β を利用して、$\gamma = a\alpha + b\beta$ と表せたとする。この時、実数 a, b を求めなさい。

2. 一般に複素数 $\delta = x + yi \quad (x, y \in \boldsymbol{R})$ が与えられた時、この複素数 δ を、複素数 α, β と、実数 p, q を用いて、$\delta = p\alpha + q\beta$ と表せる時に、この p, q を x, y を用いて表せ。

3. 二つの複素数 z_1, z_2 に対して、一方が他方の実数倍でない（即ち、任意の実数 c に対して $z_1 \neq cz_2$ かつ、 $z_2 \neq cz_1$ である）時、「任意の複素数 z 対して、ある実数 u, v が存在し、$z = uz_1 + vz_2$ と表せる」ことを示せ。

問題 25　二項定理の証明をしなさい（ヒント：講義では、略証明を行っている）

問題 26

$N[x] = \{f(x) | x$ を変数とする自然数係数多項式$\}$

$C[x] = \{f(x) | x$ を変数とする複素係数多項式$\}$

とした時に、それぞれ、$N[x]$ と、$C[x]$ が四則（和、差、積、商）と、多項式の合成に関して、閉じているならば、その証明を、閉じていないならば、その反例を挙げなさい。

問題 27　次の deg の性質を証明しなさい。

1. $\deg\,(f(x) \pm g(x)) \leq \max(\deg\,f(x), \deg\,g(x))$

2. $\deg\,(f(x)g(x)) = \deg\,f(x) + \deg\,g(x)$ (ただし、$f(x)$ も $g(x)$ も 0 でないとする)

3. $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ で $(g(x) \neq 0, h(x)$ は商$)$ の時 $\deg\,h(x) = \deg\,f(x) - \deg\,g(x)$

問題 28　$\deg\,f(g(x))$ を $\deg\,f(x)$ と $\deg\,g(x)$ で表すと、どうなるか？その関係を示し、証明しなさい。

問題 29　多項式 $f(x)$ を $x - a,\ x - b\ (a \neq b)$ で割った余りをそれぞれ r, s とするとき $f(x)$ を $(x - a)(x - b)$ で割った余りを求めよ。

問題 30　実係数の 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が虚根 $a + bi$ をもてば、$-2a$ も根であることを示せ。

問題 31　次の不等式を証明せよ。

1. $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ (シュワルツの不等式)

2. $\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(c+z)^2} \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)} + \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ (三角不等式)

問題 32　　複素数 $z = x + yi \quad (y \neq 0)$ に対して、zz' も $z + z'$ も共に実数になるならば、実は、z' は、z の共役複素数 $\bar{z}$ であることを示せ。

問題 33

極形式で記述された二つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して、$\theta_1 - \theta_2 = n\pi \quad (n \in \boldsymbol{Z})$ の時、この二つの複素数は z_1, z_2 は**平行である** と呼ぶ[1]。

二つの複素数 $z_1, z_2 \quad (z_2 \neq 0)$ が平行であるための必要十分条件は、$\frac{z_1}{z_2}$ が実数の時、即ち、$\frac{z_1}{z_2} = \overline{(\frac{z_1}{z_2})}$ であることを示せ。

問題 34　　二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が複素数解 $a + bi \quad (b \neq 0)$ を持つならば、もう一つの解は、$a - bi$ であることを証明せよ。

問題 35

極形式で記述された二つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して、$\theta_1 - \theta_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \in \boldsymbol{Z})$ の時、この二つの複素数は z_1, z_2 は**直交する** と呼ぶ[2]。

二つの複素数 $z_1, z_2 \quad (z_2 \neq 0)$ が直交するための必要十分条件は、$\frac{z_1}{z_2}$ が純虚数の時、即ち、$\frac{z_1}{z_2} = -\overline{(\frac{z_1}{z_2})}$ であることを示せ。

問題 36　　複素平面上の点 $P(x,y), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ とそれに対応する複素数 $z = x + yi, \alpha = x_1 + y_1 i, \beta = x_2 + y_2 i$ について次の問いに答えなさい。

1. 点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ に平行な直線 l_1 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $\bar{\beta}z - \beta\bar{z} = \bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

2. 二点 A, B を通る直線 l_2 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $(\bar{\beta} - \bar{\alpha})z - (\beta - \alpha)\bar{z} = \bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

問題 37　　複素平面上の点 $P(x,y), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ とそれに対応する複素数 $z = x + yi, \alpha = x_1 + y_1 i, \beta = x_2 + y_2 i$ について次の問いに答えなさい。

1. 点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ に垂直な直線 l_3 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = \bar{\beta}\alpha + \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

---

[1] これは、z_1, z_2 を複素平面上の点 P_1, P_2 に対応させた時に、ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ が平行である条件となっている。

[2] これは、z_1, z_2 を複素平面上の点 P_1, P_2 に対応させた時に、ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ が直交する条件となっている。

2. 線分 AB の垂直二等分線 l_4 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $(\bar{\beta}-\bar{\alpha})z+(\beta-\alpha)\bar{z}=\bar{\beta}\beta-\alpha\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

問題 38　点 $P(x,y)$ を原点を中心に θ だけ反時計周りに回転させた点を $Q(x',y')$ とする時、次の問に答えよ。

1. x',y' を、x,y,θ を用いて表せ。

2. $z=x+yi$, $z'=x'+y'i$ とする時に、z' を z,θ を用いて表せ。

3. 上記の関係で、$z'=cz$ となるように、c を θ を用いて表せ。

問題 39　x^2+1 で割ると $x-1$ 余り、x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余るような多項式の内、次数がもっとも小さいものを求めよ。

問題 40

1. 三次方程式 $x^3+3px+q=0$ の根を α,β,γ としたとき、$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ を p,q の多項式で表わせ。

2. $f(x)=x^3+3px+q$ としたとき，$f(x)=0$ が重根を持つための必要十分条件は $f(x)$ と $f'(x)=3x^2+3p$ が互いに素ではないことを示せ。また，この条件を p,q の多項式を用いて表せ。

問題 41　方程式 $x^7-1=0$ の根と係数の関係を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$$

問題 42

1. $\zeta=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ とする。このとき、次の等式を示せ。

$$x^5-1=(x-1)(x-\zeta)(x-\zeta^2)(x-\zeta^3)(x-\zeta^4)$$

2. 自然数 n に対し、$\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とおく。このとき、次の等式を示せ。

$$x^n-1=(x-1)(x-\zeta)(x-\zeta^2)\cdots(x-\zeta^{n-2})(x-\zeta^{n-1})$$

[**定義**] (整数値多項式) x に関する一変数多項式 $f(x)$ が、「任意の整数 n に対して、$f(n)$ もまた整数になる」場合、「その多項式 $f(x)$ は、**整数値多項式** である」と言う。

問題 43

1. n を整数とすると、$n(n+1)(n+2)(n+3)$ は、常に $4! = 24$ で割切れることを示せ[3]。

2. 一般に、 x に関する k 次式 $F_k(x)$ を次のように定める。

$$\begin{cases} F_0(x) &= 1 \\ F_{k+1}(x) &= F_k(x) \times \dfrac{(x+k)}{k+1} \qquad (k \geq 0) \end{cases}$$

この時、x が整数ならば、$F_k(x)$ も整数になること、即ち、$F_k(x)$ が整数多項式であることを示せ。

問題 44

1. x に関する n 次の一変数多項式 $f(x)$ が整数値多項式ならば、実は、ある整数 $a_0, a_1, .., a_n$ を適切に選ぶことにより、問題 43 で定義された関数 $F_k(x)$ を用いて、$f(x) = a_0F_0(x) + a_1F_1(x) + \cdots + a_nF_n(x)$ と表せることを示せ。

2. 上の事実を用い、任意の自然数 n に対して $n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n$ が、24 の倍数になることを示せ。

問題 45 x に関する n 次多項式 $f(x)$ が整数値多項式になるための必要十分条件は、$k+1$ 個の連続する整数 $i = 0, 1, .., n$ に対して、$f(i)$ が整数になることを示せ (ヒント: $f(x)$ が n 次の多項式ならば、$f(x+1) - f(x)$ の次元が $n-1$ 以下になることを利用し、$f(x)$ の次元に関する帰納法を適用する)。

問題 46

1. x に関する一次関数 $L_0(x), L_1(x)$ を、二つの相異なる実数 x_0, x_1 を用いて、次の様に定義する。

$$\begin{cases} L_0(x) &= \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} \\ L_1(x) &= \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

この時、二点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る一次関数 $y = f(x)$ は、次のように表すことができることを示せ。

$$y = f(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

[3] $n!$ は、負でない整数 n に対して、$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ で定義され「n の階乗」と呼ぶ。従って、$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ となる。ただし、$0! = 1$ と定める。

2. 一般に、$n+1$ の相異なる実数 $x_0, x_1, .., x_n$ に対して、$n+1$ 個の多項式 $L_{n,k}(x)$ を次のように定める。

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

この時、任意の関数 $f(x)$ に対して次の多項式 $P(x)$ [4]を考える。

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + f(x_1)L_{n,1}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_{n,i}$$

すると、実は、$f(x_i) = P(x_i) \quad (i = 0, 1, .., n)$ となることを示せ。

問題 47　多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$ を考える。相異なる $n+1$ 個の複素数 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して、$f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0$ となるならば、$c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ であることを証明せよ。

問題 48　多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$, $g(x) = d_0x^n + d_1x^{n-1} + \cdots + d_{n-1}x + d_n$ に対し、$h(x) = f(x) - g(x)$ に前の問題の結果を適用することで次を証明せよ。

$c_0 = d_0,\ c_1 = d_1,\ \ldots c_n = d_n$ であるための必要十分条件は相異なる $n+1$ 個の複素数 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して、$f(a_0) = g(a_0),\ f(a_1) = g(a_1),\ \ldots f(a_n) = g(a_n)$ となることである。

問題 49　多項式 $f(x), g(x)$ は $(x^2+1)f(x) + (x^2+x+1)g(x) = 1$ を満たすとする。

1. $(x^2+x+1)g(x)$ は x^2+x+1 で割り切れ、x^2+1 で割ると 1 余ることを示せ。
2. $f(x)$ を用いて, x^2+1 で割ると割り切れ、x^2+x+1 で割ると 1 余る多項式をひとつ求めよ。
3. $(x+3)(x^2+1)f(x) + (x^2+x+1)g(x)$ を x^2+1, x^2+x+1 で割った余りを求めよ。
4. x^2+1 で割ると $x-1$ 余り、x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余るような多項式を求めよ。
5. x^2+1 で割ると $x-1$ 余り、x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余るような多項式で次数が 3 以下のものはちょうど一つあることを示せ。

問題 50　複素係数の多項式 $f(x) = x^3 + (-2-i)x^2 + (1+2i)x + (4+3i)$ とその係数をすべて共役複素数で置き換えた多項式 $g(x) = x^3 + (-2+i)x^2 + (1-2i)x + (4-3i)$ を考える。

1. a が $f(x) = 0$ の根ならば $\overline{a}$ は $g(x) = 0$ の根となることを示せ。

[4] この関数を、*Lagrange* **の補間多項式** と呼ぶ。

2. $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ と因数分解されるとき、$g(x)$ を因数分解せよ。

3. $f(x)g(x)$ は実係数の多項式となることを示せ。

【定義】 (集合が演算に関して閉じている)
ある集合 S とその要素の関する演算 $\oplus$ が与えられた時に、「S の任意の要素に対して、演算が定義されており、その結果が、再び S の要素になる ($\forall x, y \in S[x \oplus y \in S]$) 」ならば、「S は、演算 $\oplus$ に関して閉じている」と言います。そして、そうでない場合は「閉じていない」と言います。例えば、自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ は、加法演算 $+$ に関して閉じていますが、減法演算 $-$ に関しては閉じていません。また、偶数全体の集合 E は、加法演算 $+$ に関して閉じていますが、奇数の集合 O は、同じ加法演算 $+$ に関して閉じていません。この様に、「閉じている・いない」は、与えれた集合と演算の関係で決ることが解ります[5]。

問題 51

1. 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ が、和、差、積に関して閉じていることを利用して、有理数の集合全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ も和、差、積に関して閉じていることを示せ。

2. 実数 $\boldsymbol{R}$ が、和、差、積に関して閉じていることを利用して、複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ が和、差、積に関して閉じていることを示せ。

問題 52

1. 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ から、0 と取り除いた集合を $\boldsymbol{Q}^*(= \boldsymbol{Q} - \{0\} = \{x | x \in Q, x \neq 0\})$ とする時、$\boldsymbol{Q}*$ は、乗算と除算の両方で閉じていることを示せ。ただし、$\boldsymbol{Z}$ が加減乗算に関して閉じていることを利用してよい。

2. 同様にして、上記の $\boldsymbol{Q}^*$ は、加算に関して閉じていないことを示せ。

3. 正の有理数全体の集合 $Q^+ = \{x | x \in Q, x > 0\}$ は加算、乗算、除算に関して閉じていることを示せ。

問題 53 　複素数の実部と虚部が共に正であるような集合を $\boldsymbol{C}^+(= \{x + yi | x, y \in \boldsymbol{R}, x > 0, y > 0\})$ とする時に、次の問いに答えなさい。

1. $\boldsymbol{C}^+$ は、和に関して閉じていることを示せ (実数 $\boldsymbol{R}$ が和に関して閉じていることを利用してよい)。

---

[5] 一般に、自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ が、和、積に関して閉じていること、実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ が、和、差、積に関して閉じていることも、それぞれ証明できるが、それらを示すには、それぞれ自然数や実数に関する定義に立ち戻って証明する必要があるので、普通は成立するものとして扱う。それに対して、整数、有理数、複素数全体の集合 $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{C}$ が和、差、積に関して閉じていることは、自然数や、実数が閉じていることを利用して簡単に示すことができる (以下の課題)。なお、除算は、0 で割ることができないので閉じていないが、これらの集合から 0 を取り除いた集合 $\boldsymbol{Q} - \{0\}, \boldsymbol{R} - \{0\}, \boldsymbol{C} - \{0\}$ を考えると、これは除算に関しても閉じていることが解る。

2. $\boldsymbol{C}^+$ は、積に関して閉じていないことを示せ。

【定義】 (剰余類)
整数 x と自然数 p が与えられた時に、x を p を割った余りを $\overline{x_p}(= x \mod p)$ (あるいは、 p が明らかな場合に、p を省略して、単に $\overline{x}$) で表すことにします。ただし、余り $\overline{x_p}$ は $x = pq + \overline{x_p}, q \in \boldsymbol{Z}, 0 \leq \overline{x_p} \leq p - 1$ を満す整数とします。
そして、この余りだけを集めた集合を $\boldsymbol{Z}/pZ = \{\overline{x_p} | x \in Z\}$ を剰余類と呼びます[6]。

問題 54

1. $\boldsymbol{Z}/pZ$ 上の和 $(\overline{+})$、差 $(\overline{+})$、積 $(\overline{\times})$ をそれぞれ次のように定義するとき、$\boldsymbol{Z}/pZ$ は、これらの演算に関して閉じていることを示せ。

   和 $\overline{x} \mathbin{\overline{+}} \overline{y} = \overline{x + y}$

   差 $\overline{x} \mathbin{\overline{-}} \overline{y} = \overline{x - y}$

   積 $\overline{x} \mathbin{\overline{\times}} \overline{y} = \overline{x \times y}$

   ただし、$\boldsymbol{Z}$ が、和、差、積に関して閉じていることを用いてよい。

2. $\boldsymbol{Z}/pZ$ 上の二つの要素 $\overline{x}, \overline{y}$ 対して、もし、$\boldsymbol{Z}/pZ$ の要素 $\overline{z}$ が $\overline{x} = \overline{y} \mathbin{\overline{\times}} \overline{z}$ を満す時、$\overline{z}$ を $\overline{x}$ を $\overline{y}$ で割った商と呼び、$\overline{x}/\overline{y}$ で表す。また、この商を求める演算を Z/pZ 上の除算と呼ぶことにする。

   (a) $Z/5Z - \{\overline{0}\}$ は、除算に関して閉じいていること示しなさい (ヒント:$Z/5Z$ は要素が 5 つしかないので、$Z/5Z - \{\overline{0}\}$ は要素が 4 つしかない。実際に 4×4 の除算表を書き、その結果が全て存在することを示せばよい)。

   (b) $Z/6Z - \overline{0}$ は、除算に関して閉じいていないことを示しなさい (ヒント:$\overline{x}/\overline{z}$ が存在しないような、具体的な x, y の組を一つ示せばよい)。

問題 55

1. $\boldsymbol{R}$ を係数とする x に関する多項式全体の集合を $\boldsymbol{R}[x] = \{f(x) | f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, i \in \boldsymbol{Z}^+, a_0 \in \boldsymbol{R}\}$ とするとき、$\boldsymbol{R}[x]$ が、積に関して閉じるていることを示せ。

問題 56 集合 $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \boldsymbol{Q}\}$ について、次の問いに答えなさい[7]。

1. $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ が積に関して閉じていることを示せ。

---

[6]この集合は、形式的には、無限集合の形に記述されているが、実際は、要素が丁度 p 個の有限集合である。
[7]このような集合 $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ を、「$\boldsymbol{Q}$ に $\sqrt{2}$ を付加した集合」と呼ぶ。

2. $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ から、0 を取り除いた集合を $\boldsymbol{Q}^*[\sqrt{2}] = \boldsymbol{Q}^[\sqrt{2}] - \{0\} = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \boldsymbol{Q}^*\}$ とするとき、$\boldsymbol{Q}^*[\sqrt{2}]$ が除算に関して閉じていることを示せ。

問題 57　集合 $S = \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} | a, b, c, d \in \boldsymbol{Q}\}$ について、次の問いに答えなさい。

1. S が積に関して閉じていることを示せ。
2. S から、0 を取り除いた集合を S^* とするとき、S^* が除算に関して閉じていることを示せ。

問題 58　整係数の二次方程式 $x^2 + bx + c = 0 (a, b \in \boldsymbol{Z})$ の二つの根の内の一つを α とした時、集合 $S = \boldsymbol{Q}[\alpha] = \{x + y\alpha | x, y \in \boldsymbol{Q}\}$ について、次の問いに答えなさい。

1. S が積に関して閉じていることを示せ。
2. S から、0 を取り除いた集合を S^* とするとき、S^* が除算に関して閉じていることを示せ。

問題 59　次の整数の組の最大公約数を求めよ。

1.　$a = 30, b = 22$　2.　$a = 84, b = 60,$　3.　$a = 252, b = 270,$

4.　$a = 12345654321, b = 1234321,$　5.　$a = 832040, b = 2584,$　6.　$a = 2^{30} - 1, b = 2^{18} - 1.$

問題 60　次の式をみたすような整数 x, y を一組求めよ。

1.　$7x + 5y = 1$　2.　$13x + 11y = 1,$　3.　$30x + 42y = 6.$

問題 61　問題 59 のそれぞれの問に対し、d を a と b の最大公約数とした時, $ax + by = d$ となる整数 x, y を一組求めよ。

問題 62

1. $7x + 11y = 1$ となるような整数 x, y を一組求めよ。
2. 上の問の x を用いて、7 で割ると割り切れ 11 で割ると 1 余る整数をひとつ求めよ。
3. $14x + 55y$ を 7 で割った余りと、11 で割った余りを求めよ。
4. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数を求めよ。
5. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数で 0 以上 77 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 63

1. $(x-y)^2$ は x, y についての対称式であることを示せ。

2. ω を $\omega^3 = 1$ となる $\omega \neq 1$ であるような複素数とする。$(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ は x, y, z についての対称式であることを示せ。

3. $(x_1x_2 - x_3x_4)(x_1x_3 - x_2x_4)(x_1x_4 - x_2x_3)$ は x_1, x_2, x_3, x_4 についての対称式であることを示せ。

問題 64　次の対称式を基本対称式の多項式で表わせ。

1. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,

2. $x^3 + y^3$,

3. $x^3 + y^3 + z^3$,

4. $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$.

例題　ここでは対称式 $f(x,y,z) = (x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3$ を基本対称式の多項式として表わす別の方法を考えることにする。

$f(x,y,z)$ は基本対称式 $s_1 = x+y+z$, $s_2 = xy+yz+zx$, $s_3 = xyz$ の多項式として表わすことができるが $f(x,y,z)$ が 3 次の同次式であることより、

$$f(x,y,z) = as_1^3 + bs_1s_2 + cs_3$$

と置くことができる。

この式の x, y, z に適当に数を代入してみると $-2c = f(1,1,-2) = 6$, $8a+2b = f(1,1,0) = 10$, $a - 2b = f(2,-1,0) = -1$ が得られる。これより、$a = 1$, $b = 1$, $c = -3$ となるので、

$$f(x,y,z) = s_1^3 + s_1s_2 - 3s_3$$

となることがわかる。

この方法は交代式を対称式と差積の積で表わすときにも用いることができる。

問題 65　実数を係数とする n 次方程式 $f(x) = 0$ の根を重複度も込めて、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ とする。このとき、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の差積の 2 乗

$$\prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)^2 = \begin{array}{cccc} (\alpha_2-\alpha_1)^2 & (\alpha_3-\alpha_1)^2 & \cdots & (\alpha_n-\alpha_1)^2 \\ & (\alpha_3-\alpha_2)^2 & \cdots & (\alpha_n-\alpha_2)^2 \\ & & \cdots & \\ & & & (\alpha_n-\alpha_{n-1})^2 \end{array}$$

は実数であることを示せ。

問題 66　次の交代式を差積と基本対称式で表わせ。

1. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$,
2. $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$.

問題 67　直角三角形 ABC ($\angle C$ を直角とする) に対して、ベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ を、それぞれ $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と表すとき、次の問いに答えなさい。

1. 一般に、二つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2$ が成立することを示せ。
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ であることと、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$(すなわち $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$) を利用して、ピタゴラスの定理 (三平方の定理) を証明しなさい。

問題 68　次の問いに答えなさい。

1. 三つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_1, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_2 とし、また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の長さは等しいとする。この時、$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を示せ。
2. 二等辺三角形 ABC (ただし、AB = AC とする) に対して、$\angle A$ の角の二等分線と、底辺 BC の交点を P とする時に、実は、P は、底辺 BC を二等分することを、ベクトルの長さと内積を用いて示せ。(ヒント：$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}, \boldsymbol{c}=\overrightarrow{AP}$ とすれば、前小問の結果が利用できる。後は、$\overrightarrow{BP}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ であることを利用すれば...)

問題 69　次の平面幾何学の問題 (内心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の角の二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の内接円の中心であることを示せ。

問題 70　次の平面幾何学の問題 (外心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の辺の垂直二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の外接円の中心であることを示せ。

問題 71　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. $\boldsymbol{K}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

2. 上の問の結果を利用して，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 72 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線型結合として表すことはできないことを示せ。

問題 73

Text (p.3) の定理 [1.1]、並びに 定理 [1.2] は、図形的に証明を行っている行っているが、空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が、それぞれ以下のような成分を用いて、表現されているとして、これらを成分の計算の立場から証明しなさい。 (注意: 何れの定理も三つの等式からなるが、それを全て示すこと)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

1. 定理 [1.1] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。

2. 定理 [1.2] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。

問題 74 Text (p.6) の定理 [1.3] の内積の性質の内、(7), (8), (9) を、空間ベクトルの成分表示を用いて示せ。

問題 75 空間ベクトルの三つの基本ベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて、任意の空間ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

は、この三つの基本ベクトルの線型和

$$\boldsymbol{v} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

で表現できることは学んだ (Text p.5) が、この表現が一意であることを示せ。(ヒント：$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v} = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ の様に、表現できると仮定すると、実は、$x = x', y = y', z = z'$ が成立することを示せばよい)

問題 76　空間ベクトルの三つの基本ベクトル e_1, e_2, e_3 について、次の問いに答えなさい。

1. この基本ベクトルは互いに直交していることを示せ。

2. 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、この基本ベクトルと内積を用いて、次のように表現できることを示せ。

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}, e_1)e_1 + (\boldsymbol{v}, e_2)e_2 + (\boldsymbol{v}, e_3)e_3$$

問題 77　次を証明せよ。

1. 平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属ならば、ある $u, v (\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v のどちらか一方が 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ。(ヒント：平面上の原点を通る直線の方程式は $ax + by = 0$ [ただし a, b の内どちらかは 0 でない] として表すことができる。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属ならば、これらを位置ベクトルとする点 A, B の座標が同一直線上にあるので..)

2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v (\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v のどちらか一方が 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となるならば、平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属であることを示せ。

問題 78　次を証明せよ。

1. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線型従属ならば、ある $u, v, w (\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v, w のいずれかの内、少くても一つが 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + w\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ。(ヒント：平面上の原点を通る直線の方程式は $ax + by + cz = 0$ [ただし a, b, c の内、いずれか一つは 0 でない] として表すことができるので..)

2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v, w (\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v, w のいずれかの内、少くても一つが 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + w\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となるならば、平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属であることを示せ。

[**定義**] 上記の二つの大問の結果を拡張することによって、より一般的に次の形で、$n (> 0)$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対する線型独立並びに線型従属が次のように定義される (平

面ベクトルや、空間ベクトルの性質はこの定義の特殊な場合である)。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\text{が線型独立} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall c_1, c_2, .., c_n (\in R) s.t. \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0} \\
&\quad (\text{ただし、}c_i\text{の少くても一つは0でない}) \\
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\text{が線型従属} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\text{が線型独立でない} \\
&\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, .., c_n (\in R) s.t. \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \\
&\quad (\text{ただし、}c_i\text{の少くても一つは0でない})
\end{aligned}$$

問題 79　次を証明せよ。

1. 一つのベクトルが線型従属ならば、そのベクトルは零ベクトルであることを示せ。
2. 三つの平面ベクトルは常に線型従属であることを示せ。
3. 四つの空間ベクトルは常に線型従属であることを示せ。

問題 80

1. 二つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が共に、$\boldsymbol{0}$ ベクトルでなく、また、互いに、直交するならば、この二つのベクトルは線型独立であることを示せ。
2. 三つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が、いずれも $\boldsymbol{0}$ ベクトルでなく、また、どの二つを取っても互いに直交するならば、実は、この三つのベクトルは線型独立であることを示せ。
3. 一般に、$n(>0)$ 個のベクトルに対して、どれも $\boldsymbol{0}$ ベクトルでなく、しかも、その中の任意の相異なる二つのベクトルが直交するのであれば、この n 個のベクトルは線型独立であることを示せ。

問題 81　次を証明せよ。

1. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に同じベクトルが 2 個以上現れるなら $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。
2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に零ベクトル $\boldsymbol{0}$ が現れるならば、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

問題 82　n 個の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、もし、その内の幾つかのベクトルが線型従属になっていたら、全体も線型従属になることを示せ。

問題 83　n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が線型独立であれば、その内から $i(0 < i < n)$ 個のベクトルを任意に選んでも、それらが線型独立になることを示せ。(ヒント：前問の結果を利用し、背理法を使えば..)

問題 84 n 個ののベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、その中からどの $n-1$ 個のベクトルを取ってきても線型独立だが、n 個全部だと線型従属になってしまうような組み合わせが存在することを示せ。(ヒント：最初に互いに線型独立な $n-1$ 個の線型独立な $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ を考え、$\boldsymbol{a}_n$ を、この $n-1$ 個のベクトルの線型結合で表すと...)

問題 85 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が与えられたとする。$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線型結合として異なる方法で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b} &= c'_1\boldsymbol{a}_1 + c'_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c'_n\boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

と書けたとする (すなわち、$c_i \neq c'_i$ となるような i が少くても一つはある。)。このとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属であることを示せ。

問題 86 二つの空間ベクトルの $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ がそれぞれ次のように成分表示されているとする。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

この時、この二つのベクトルの内積が、成分を用いて、次のようになることは学んだ (Text p.6 の (2) 式)。

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

これを次の事実を用いて導け。

- 空間ベクトルの単位ベクトル e_1, e_2, e_3 に関してだけは、内積を次の様に定義する[8]。

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ の時}) \\ 0 & (i \neq j \text{ の時}) \end{cases}$$

- 内積の性質 (Text p.6 の定理 [1.3] (7) - (9))。
- 任意の空間ベクトルは、単位ベクトルの線型結合で表すことができる (Text p.5)。

問題 87 二次元の点を、原点を中心に α だけ反時計回りに回転させる行列を R_α とすると、その行列の成分は、次のようになる。

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

講義の定義では、R_α と R_β の積 ($R_\beta R_\alpha$) を、図形的な意味から $R_{\alpha+\beta}$ で定義した (Text p.16)。

これが、一般的な行列の積の定義と矛盾していないことを示しなさい。

[8]この定義に用いられる記号 $\delta_{i,j}$ を**クロネッカーの記号** (Text p.35 参照) と呼ぶ。

問題 88　A を実数を成分とする二行二列 (二次の正方行列)、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を二次元 (平面) の縦ベクトル、c を実数とすると、次の線型性が成立することを示しなさい。

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}) + (A\boldsymbol{y})$$

$$(cA)\boldsymbol{x} = A(c\boldsymbol{x})$$

(ヒント:行列 A 並びに、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、等号の左辺と右辺の結果が同じであることを示せばよい)

問題 89　A, B を $(2,2)$ 行列とする。

1. $AB = BA$ ならば

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

   となることを証明せよ。

2. $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ となるような行列 A, B の例を与えよ。

問題 90　二つの二次の正方行列 A, B に関して、行列間の等号 「$A = B$」を、「$\forall \boldsymbol{x} \in V^2$ s.t. $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ 」で定義する (つまり、「任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が成立」した時に、「$A = B$」とする)。この時、行列 A, B の成分に関して、次の性質が成り立つことを示しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \text{に対して、} A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a &= e \\ b &= f \\ c &= g \\ d &= h \end{cases}$$

(ヒント: 右から左 ($\Leftarrow$) は、単に、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、その計算結果を比較すればよい。逆 ($\Rightarrow$) も、同様に行っても良いが、特別なベクトル $\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関しても、$A\boldsymbol{e}_0 = B\boldsymbol{e}_0, A\boldsymbol{e}_1 = B\boldsymbol{e}_1$ が成立することを利用した方が簡単になる)

問題 91　互いに直交する 0 でない二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し、それぞれへの射影子を、$P_{\boldsymbol{x}}, P_{\boldsymbol{y}}$ で表すとする。この時、次の等式を証明しなさい。

1. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$

2. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $P_{\boldsymbol{x}} + P_{\boldsymbol{y}} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $P_{\boldsymbol{x}} \cdot P_{\boldsymbol{y}} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ヒント:この二つのベクトルは、独立なので、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{z}$ が、実は、ある実数の組 a, b を用いて、$\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ と表されることを利用すれば...)

問題 92　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} が次の形

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{ただし、}|ad - bc| \neq 0\text{ の時})$$

で表されているとする。

この時、二つの変数 x, y に関する、次の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad \cdots\ [1]$$

について、次の問に答えなさい。

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示しなさい。

2. 上記の行列 E は、任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して、$E\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ となることを示しなさい。

3. 行列 A, ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ を用いて、上記の連立方程式 [1] を表しなさい。

4. もし、行列 Aが、逆行列を持つ(すなわち、$|ad - bc| \neq 0$ の時)場合、$A^{-1}\boldsymbol{p}$ が、上記の連立方程式 [1] の解となることを示しなさい。

5. 連立方程式

$$\begin{cases} au + bv = 0 \\ cu + dv = 0 \end{cases} \qquad \cdots\ [2]$$

の解 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を考える。すると、もし、$\boldsymbol{z}$ が方程式 [1] の解ならば、$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$ も、また方程式 [1] の解になることを示しなさい。

6. 上記の性質を利用して、連立方程式 [1] の解が一つしかないならば、連立方程式 [2] は、$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持たないことを示しなさい。

問題 93　座標平面を原点を中心にして、反時計まわりに θ 回転移動したとき、点 $P(x, y)$ の移る先の点を $P(x', y')$ とする。
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を対応させる写像 T は $\boldsymbol{R}^2$ から R^2 への線型写像であることを示せ。

問題 94　上と同様のことを、原点を通る直線に関する対称移動について示せ。

問題 95　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. $J^2 = -E$ であることを示せ。

2. $a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R}$ とする。このとき、次を示せ。ただし、i は虚数単位である。

$$(a + bi) + (c + di) = e + fi \;\Leftrightarrow\; (aE + bJ) + (cE + dJ) = eE + fJ,$$

$$(a + bi)(c + di) = e + fi \;\Leftrightarrow\; (aE + bJ)(cE + dJ) = eE + fJ.$$

3. $(4E - 3J)A = E$ となる行列 A を求めよ。

4. $(aE + bJ)(cE + dJ) = (cE + dJ)(aE + bJ)$ であることを示せ。

問題 96　線型空間の公理

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (交換法則)

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (結合法則)

3. $\exists \vec{0} \forall \vec{a} [\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}]$ (零元 [単位元] の存在)

4. $\forall \vec{a} \exists (\vec{-a}) [\vec{a} + (\vec{-a}) = (\vec{-a}) + \vec{a} = \vec{0}]$ (逆元の存在)

5. $c(\vec{x} + \vec{y}) = c\vec{x} + c\vec{y}$ (スカラー倍の分配則 I)

6. $(c + d)\vec{x} = c\vec{x} + d\vec{x}$ (スカラー倍の分配則 II)

7. $(cd)\vec{x} = c(d\vec{x})$ (スカラー倍の結合法則)

について、次の問に答えなさい。

1. 零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その 0 倍した元 $0\vec{x}$ は、零元であることを証明しなさい。
3. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その逆元の性質を満す元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniqueness)。

問題 97

複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ の要素 $\boldsymbol{x} = a + bi, \boldsymbol{y} = c + di$ と 実数 e に関して、普通に和 $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a + c) + (b + d)i)$ と、定数倍 ($e\boldsymbol{x} = (ea) + (eb)i$) を考えると、$\boldsymbol{C}$ 全体は、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 98 $M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。すなわち、

$$M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \boldsymbol{R} \right\}$$

とした時、$M_{2,2}$ は、線型空間になっていることを示しなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 99 $M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. 任意の三つの行列 $A, B, C (\in M_{2,2})$ に対して、 $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示しなさい。
2. もし、任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE_1 = A$ となる行列 E_1 と、$E_2A = A$ となるような行列 E_2 が、共に、$M_{2,2}$ の中に存在すれば、実は、この二つの E_1, E_2 は、同じ行列であることを証明せよ。
3. 任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE = EA = A$ となる行列 E ($M_{2,2}$ の単位行列と呼ぶ) を (一つ) 求めなさい。
4. 単位行列の性質を満す要素は $M_{2,2}$ には、一つしかないことを示しなさい。(ヒント: 単位行列の性質 [$AE' = E'A = A$] を満す行列 E' があると、それは、一つ前の問題で求めた行列 E と同じになることを示せばよい。)
5. ある行列 A に対して、$AB = E,\ CA = E$ を満す、行列 B, C が存在すれば、実は、$B = C$ であることを示しなさい。

6. ある行列 A に対して、$AX = XA = E$ を満すような行列 X が、$M_{2,2}$ に存在するときに、その行列 X を 行列 A の逆行列と呼び A^{-1} で表す。もし、行列 A に対して、その逆行列 A^{-1} が存在すれば、それは、一つしかないことを示しなさい。

7. 零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ には、逆行列が存在しないことを示しなさい。

8. 二つの行列 A, B が共に、逆行列を持つならば、二つの行列の積 AB も逆行列を持つことを示しさい。また、この時、AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を、A, B の逆行列 A^{-1}, B^{-1} を用いて表しなさい。

9. 行列 A が逆行列 A^{-1} をもてば、A を $n(n \in \boldsymbol{N})$ 回掛けあわせた行列 A^n も逆行列を持つことを示しなさい。また、A^n の逆行列 $(A^n)^{-1}$ を A^{-1} (と n) を用いて表しなさい。

問題 100 $M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. $M_{2,2}$ には、零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。

2. $M_{2,2}$ の零元を求めなさい。

3. 任意の行列 A に対して、その 0 倍した元 $0A$ は、零元であることを証明しなさい。

4. 任意の行列 A に対して、その逆元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniquenss)。

5. 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆元 $-A$ を求めなさい。

6. 任意の行列 A 対して、その (-1) 倍した行列 $(-1)A$ は、その行列の逆元であることを証明しなさい。

問題 101 実数係数の二次式全体の集合を $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$R_2[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = ax^2 + bx + c, \boldsymbol{g} = g(x) = ux^2 + vx + w$ と、実数 h に対して、普通に、和 $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a+u)x^2 + (c+v)x + (c+w))$ と、定数倍 ($h\boldsymbol{f} = (ha)x^2 + (hb)x + (hc)$) を考えるとき、$R_2[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 102　三角関数の和の集合 $F[x] = \{a\cos x + b\sin x | a, b \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$F[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = a\cos x + b\sin x, \boldsymbol{g} = g(x) = c\cos x + d\sin x$ と、実数 e に対して、普通に、和 ($\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a+c)\cos x + (b+d)\sin x$) と、定数倍 ($e\boldsymbol{f} = (ea)\cos x + (eb)\sin x$) を考えるとき、$F[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 103　問題 102 で定義された集合 $F[x]$ に対して、次の問いに答えなさい。

1. $F[x]$ の要素 $f(x) = a\cos x + b\sin x$ に対して、これを x で微分した関数 $f'(x)$ が、再び、$F[x]$ に入ることを示せ。
2. $F[x]$ の要素 $f(x)$ に対して、$f'(x)$ を対応させる変換 D が線型変換であることを示せ。

問題 104　平面ベクトル全体の集合 V^2 上の線型変換全体の集合を $F[V^2]$ とする。$F[V^2]$ の要素 T, S 並びに実数 c に対して、和 $(T+S)$ と定数倍 (cT) を、それぞれ $(T+S)(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}) + S(\boldsymbol{v}),\ (cT)(\boldsymbol{v}) = c(T(\boldsymbol{v}))$ と定義すると、$F[V^2]$ は線型空間になっていることを示せ。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 105　T, S を V 上の線型変換とする。この時、次の問いに答えなさい。

1. T, S の二つの変換の合成 $S \cdot T$ もまた、V 上の線型変換であることを示せ。
2. T の逆変換 T^{-1} が存在すれば、この逆変換 T^{-1} もまた、V 上の線型変換であることを示せ。

問題 106　平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、それを実数 c 倍した $c\boldsymbol{v}$ を対応させる変換を T_c $(c \in \boldsymbol{R})$ で表すことにする (すなわち $T_c(\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{v}$ となる)。この時、次の問いに答えなさい。

1. $T_3(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$ を求めなさい。
2. T_c は、線型変換であることを示しなさい。
3. T_c に対して、$T_c = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。

問題 107　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ が独立であるとする。この時、二つの線型変換 T, S に対して、$T\boldsymbol{p} = S\boldsymbol{p},\ T\boldsymbol{q} = S\boldsymbol{q}$ であれば、実は、$T = S$ であることを示せ。

問題 108　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ を考える。任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、平面ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) \end{pmatrix}$ を対応させる変換 T を考える (ただし、$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}), (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v})$ は、それぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積である)。この時、次の問いに答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。

2. T に対して、$T = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。

問題 109　原点を通り、x 軸に対して角度 θ で交わる、平面上の直線 $\ell_\theta : y = x\tan\theta$ を考える。この時、次の問いに答えなさい。

1. 平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を直線 ℓ_θ に対して、線対称となるベクトルを $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とするとき、x', y' を x, y, θ を用いて表せ。

2. 上記のように平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}$ に変換する変換 T に対する行列 A を求めよ。

3. 原点を中心に反時計周りに θ 回転する行列を R_θ、また、x 軸に対して線対称移動を行う行列を M とするとき、上記の A を $M, R_\theta, R_{-\theta}$ を用いて表現せよ (答は結果のみでよい)。

問題 110　平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、平面ベクトル $\begin{pmatrix} 2x \\ -3y \end{pmatrix}$ を対応させるような二次元ベクトル上の変換 T に対して、次の問に答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。

2. T に対して、$T = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。ただし、T_A は、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、$T_A(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ と、行列 A を用いて定義された変換の事である。

3. $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{v})$ に対して、$S(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ を満すような変換 S を、T の逆変換と呼び T^{-1} で表す。この時、変換 T^{-1} は、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をどのようなベクトルに対応させるか ?

4. $T^{-1} = T_B$ を満す行列 B を求めなさい。

5. 行列 A と行列 B はどのような関係になっているか ?

問題 111　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が互いに独立な時、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、ある実数 m, n が存在して、$\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{p} + n\boldsymbol{q}$ と表せる。そこで、この m, n の組を改めて、$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ というベクトルと同一視し、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}$ に対応させる変換を T とする時、次の問いに答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。

2. T の逆変換 T^{-1} に対応する行列 B を求めなさい。

3. T に対応する行列 A を求めなさい。

問題 112　$\boldsymbol{a}$ を 0 でないベクトルとし、T を、$\boldsymbol{a}$ への射影子とする。この時、0 でない実数 c に対して、$c\boldsymbol{a}$ への射影子を T' とすると、実は、$T' = T$ となることを示せ[9]。

問題 113　次の場合に、点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ に直交する直線の方程式を求めよ。

1. $d_1 \neq 0,\ d_2 \neq 0,\ d_3 = 0$ のとき。

2. $d_1 \neq 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = 0$ のとき。

問題 114　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が、二つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}$ であることを示しなさい。

2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = |A|$ であることを示しなさい。

3. 2 行 2 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{y})$ と表されている (ただし、$a_{22} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい

4. 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような x を求めなさい。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 115　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ が、三つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

[9]このことから、射影子で用いられるベクトルは、実は、その大きさには意味がなく、そのベクトルの向きだけが意味を持つということが解る。これは射影子の図形的な意味からも推察される。

1. $a_{21} = a_{32} = a_{31} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$ であることを示しなさい。

2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |A|$ であることを示しなさい。

3. 3 行 3 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y} - \frac{a_{32}}{a_{33}}\boldsymbol{z}\ \boldsymbol{z})$ と表されている (ただし、$a_{33} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい。

4. 行列 $C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} u & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような u, v を求めなさい (このような、u, v の組は、一組とは限らないが、どれか一つを求めればよい。)。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 116　行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, を満たすとき $A(-\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ を求めよ。

問題 117　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 118　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 119　行列 A の複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. $\overline{\overline{A}} = A$

2. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

3. $\overline{cA} = \overline{c}\overline{A}$

4. $\overline{(AB)} = (\overline{A})(\overline{B})$

問題 120　行列 A の転置行列を ${}^tA$, 複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. ${}^t({}^tA) = A$

2. ${}^t(\,\overline{A}\,) = \overline{(\,{}^tA)}$

3. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

4. ${}^t(cA) = c\,{}^tA$

5. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

問題 121　三次元空間の二つの直線 ℓ_1, ℓ_2 がそれぞれ、点 P_1, P_2（その位置ベクトルは、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とする）を通り、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に平行である時、この二つの直線の距離を、ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を用いて表せ。

問題 122　A, B, C を (m, n) 行列、c, d を複素数、O を (m, n) 型の零行列とした時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A + O = A, \quad A - A = O$

2. $(A+B)+C = A+(B+C)$

3. $A+B = B+A$

4. $c(A+B) = cA + cB$

5. $(c+d)A = cA + dA$

6. $(cd)A = c(dA)$

7. $1A = A, \quad 0A = O$

問題 123　A, B を (l, m) 行列、C, D を (m, n) 行列、$O_{p,q}$ を (p, q) 型の零行列とする時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A(C+D) = AC + AD$

2. $(A+B)C = AC + BC$

3. $AO_{m,n} = O_{l,n}, \quad O_{l,m}C = O_{l,n}$

問題 124　T を 3 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^3$ から 2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^2$ への線型写像とし、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{K}^3$ の標準基底とする。

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ T(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ T(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

のとき次を計算せよ。

$$(1)\quad T(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}),\ (2)\quad T(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}),\ (3)\quad T(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}).$$

問題 125

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とした時、$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対し、$A\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を計算し、

$$A = (A\boldsymbol{e}_1\ A\boldsymbol{e}_2\ \cdots A\boldsymbol{e}_n)$$

となることを示せ。

問題 126 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ を $\boldsymbol{K}^4$ の標準基底とする。
$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような $(2,4)$ 行列 A を求めよ。

問題 127

$$X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。区分けによる計算を用いて X^2, X^3, A^2, A^3, AX, XA を求めよ。

問題 128 次の行列 A, B のうち積 AB が可能なものはどれか。またそのとき AB の行の数、列の数はどうなるか。

1. A は $(2,4)$ 行列、B は $(2,3)$ 行列。
2. A は $(2,3)$ 行列、B は $(3,3)$ 行列。
3. A は $(3,1)$ 行列、B は $(3,3)$ 行列。
4. A は $(1,4)$ 行列、B は $(4,2)$ 行列。

5. A は $(3,1)$ 行列、B は $(1,2)$ 行列。

6. A は $(4,2)$ 行列、B は $(4,2)$ 行列。

問題 129 次の条件を満たす行列 A, B の例を作ってみよ。

1. 積 AB は定義できるが BA は定義できない。
2. AB, BA はどちらも定義できるが次数が異なる。
3. AB, BA はどちらも 2 次行列になるが、$AB \neq BA$ となる。
4. AB, BA はどちらも 2 次行列で、$AB = BA$ となる。

問題 130 次の計算をせよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

問題 131 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ とする。行列の積の結合法則を利用して A^5 を計算せよ。

問題 132

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算を行いなさい。
1. AB, 2. BA, 3. AC, 4. CA, 5. AD, 6. DA

問題 133 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. J^2, J^3, J^4, J^5 を求めよ。

2. 二項定理を利用して $(E+J)^{10}$ を求めよ。

問題 134　次の図の様に、A ～ O の間に道がある時に次の問に答えなさい。

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
A & - & - & B & & & C & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & \\
D & - & - & E & - & - & F & - & - & G & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & \\
 & & & H & - & - & I & & & | & J & - & - & K \\
 & & & | & & & & & & | & | & & & \\
 & & & | & & & & & & | & | & & & \\
 & & & L & - & - & - & - & - & M & N & - & - & O
\end{array}$$

1. 行列 $X=(x_{\alpha\beta})$ (但し $\alpha=$ A ～ O, $\beta=$ A ～ O) とし、

$$x_{\alpha\beta}=\begin{cases} 1 & (\alpha \text{ と } \beta \text{ の間に道がある時}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める時 (例えば、A と B の間には道があるので x_{AB} は 1、A と C の間には道がないので、x_{AC} は 0 となる) の X を求めなさい。

2. $Y=(y_{\alpha\beta})=X^2$ とした時に、$y_{\alpha\beta}$ の値は、どんな意味を持つか ?

3. D から、丁度 4 回、道を渡った時に到達する (但し、同じ場所や同じ道を何度通っても良いとする) ことができる場所はどことどこか ? また、その時、そこに到る道の種類は全部で何通りか ?

問題 135　演習書の p.10 の類題 4 を解きなさい。

問題 136　演習書の p.12 の類題 6 を解きなさい。

問題 137

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&0&2&0&0&0&1 \\ 0&0&2&0&0&0&1&0 \\ 0&2&0&0&0&1&0&0 \\ 2&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 1&0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&2&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算をしなさい。
1. AB,　2. BA　3. A^2,　4. B^2

問題 138

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

の時、A^n を求めなさい。

問題 139　次の行列の計算をしなさい。

$$
\begin{pmatrix}
-1 & 0 \\
1 & 0 \\
1 & -1 \\
0 & 1 \\
0 & -1 \\
0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 \\
-1 & 1 \\
0 & 0 \\
0 & -1 \\
1 & 1 \\
1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 & 1 \\
-1 & 0 \\
1 & 0 \\
-1 & 1 \\
1 & 0 \\
0 & 1
\end{pmatrix}
$$

問題 140

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

とした時に次の値を求めなさい。
1. A^2,　2. A^4,　3. A^{16},　4. A^{40}

問題 141　$(3, 2)$-行列 A に対し、5 次行列 B を

$$B = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$$

と定める。ただし、E_3, E_2 はそれぞれ 3 次と 2 次の単位行列である。

1. $B^2 = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & 2A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$ であることを示せ。
2. B^n を求めよ。
3. B は正則行列であることを示せ。

問題 142　(k, l) 行列 A, (l, m) 行列 B, (m, n) 行列 C に対し、${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$ となることを示せ。

問題 143　A, B, C を n 次正則行列とする。このとき、$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ。

問題 144　A を n 次正則行列とする。${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$ を用いて $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が成り立つことを示せ。

問題 145　A を n 次行列とする。この時、次の問に答えなさい。

1. A^2 が正則行列ならば、実は、A 自身も正則行列であることを示せ。
2. A が正則行列ならば、任意の整数 k に対して A^k も正則行列であることを示せ。

問題 146　A, B を次の様な形をした n 次対角行列とする。この時、次の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

1. 二つの行列の積 AB を求めなさい。
2. A が逆行列を持つ条件と、A がその条件を満す時の A の逆行列を求めなさい。

問題 147　n 次行列 A に対して $\mathrm{tr}(A)$ で、A の固有和 (trace:トレース) を表すとする ($A = \{a_{ij}\}$ の時、$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$)。この時、P が正則行列であれば、$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$ であることを示せ。

問題 148　A, B, X を n 次行列、E を n 次の単位行列とするとき、次の問に答えなさい。

1. A が正則ならば、$AX = B$ を満す行列 X は一意に決ることを示しなさい。
2. $E - A$ が正則ならば、$\displaystyle\sum_{i=0}^{k} A^i = (E - A^{k+1})(E - A)^{-1}$ であることを示しなさい。

問題 149　次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 150　次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 151　n 次行列 $J_n = (\delta_{i,n-j+1})(1 \le i, j \le n)$ (ただし、$\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタで、$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases}$ と定義されている) について、次の問に答えなさい。

1. n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して AJ_n を求めなさい。
2. n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して J_nA を求めなさい。
3. J_n は、正則行列であることを示し、その逆行列 J_n^{-1} を求めなさい。

問題 152　以下の表は、各々の野菜に 1 kg 中に含まれる、様々な栄養素の含有量である。

食品名	エネルギー	たんぱく質	炭水化物	ビタミン C	鉄
アスパラガス・若茎	220	26	39	150	7
えだまめ	1350	117	88	270	27
グリーンピース	930	153	69	190	17
かぶ・葉	200	23	39	820	21
かぼちゃ	490	16	109	160	5

また、次の表は、食堂でのある一日の三食で消費された食材の量 (kg 単位) である。

食事	アスパラガス・若茎	えだまめ	グリーンピース	かぶ・葉	かぼちゃ
朝	2	0	1	0	0
昼	0	0	0	0	3
夜	0	2	0	0	0

これについて、以下の問いに答えなさい。

1. $A = (a_{\alpha\beta})$ に対して、$a_{\alpha\beta} =$ (食品 α が含む栄養素 β の含有量) と定めた時、A を求めなさい。
2. えだまめを 2kg, かぶを 3kg, かぼちゃを 1kg 食べた時のそれぞれの栄養の含有量を求めなさい。
3. 食堂での朝、昼、晩に消費された食材に含まれるたんぱく質と、ビタミン C の含有量を求めなさい。

問題 153　三つのベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を求めなさい。
2. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ の外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}$ を求めなさい。
3. $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{z}$ が作る平行四辺形の面積を求めなさい。
4. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が作る平行六面体の体積を求めなさい。
5. $\boldsymbol{x}$ に平行で、点 $(0, 0, 1)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

6. $\boldsymbol{y}$ に垂直で、点 $(1,1,1)$ を通る平面の方程式を求めなさい。

【群の定義】集合 G の元 a,b に対し、**積**と称する第三の元 (これを ab で表す。また、a,b から ab を求める操作を ***(二項)* 演算** と呼ぶ。) が定まり、次の三つの命題 (この三つの命題を**群の公理** と呼ぶ。) を満すとき、G は (その積を求める演算に関して) **群** (group) であるという (cf. 教科書 p.248 参照)。

1. (結合法則) $\forall a,b,c \in G\,[(ab)c = a(bc)]$
2. (単位元の存在) **単位元** と称する特別な元 e がただ一つ存在して、G の全ての元 a に対して $ae = ea = a$ が成立する 。
3. (逆元の存在) G の任意の元 a に対して、$ax = xa = e$ となるような元 x が存在する。これを a の **逆元** と呼び a^{-1} で表す。

[例題 1] 整数全体 $\boldsymbol{Z}$ は、加法 $(+)$ に関して、群である。

(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Z}$ 上で、加法は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Z}$ は加法に関して群を成す。

1. $\forall a,b,c \in \boldsymbol{Z}$に対して $(a+b)+c = a+(b+c)$ なので、結合法則を満す。
2. $0 \in \boldsymbol{Z}$ であり、$\forall a \in \boldsymbol{Z}$に対して $a+0 = 0+a = a$ なので、0 は $\boldsymbol{Z}$ の加法に対する **単位元** である。
3. $\boldsymbol{Z}$ の任意の要素 a に対して、$x = -a$ とすれば、$x = -a \in \boldsymbol{Z}$ であり、$a + x = a + (-a) = 0, x + a = (-a) + a = 0$ となるので、$x = -a$ は、a の逆元となる。すなわち、$\boldsymbol{Z}$ の任意の要素に対して、逆元が存在する。

[例題 2] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、加法 $(+)$ に関して、群にならない [10] 。

(proof) $\boldsymbol{N}$ の中には、$1 + x = 1$ となるような x が存在しない (もし、$1 + x = 1$ とすると、$x = 0$ とならなければならないが、0 は $\boldsymbol{N}$ に含まれない)。したがって、単位元が ($\boldsymbol{N}$ の中に..) 存在しない。すなわち、群の公理の二つ目の性質 (単位元の存在) を満さないので、$\boldsymbol{N}$ は、加法 $(+)$ に関して、群にならない。

[例題 3] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群にならない。

(proof) $\boldsymbol{N}$ の乗法に関する単位元は 1 である (これは $\boldsymbol{N}$ に含まれる) が、$2 \times x = 1$ となる x は $\boldsymbol{N}$ に含まれないので、2 に対する逆元が $\boldsymbol{N}$ に含まれない。すなわち、群の三つ目の公理 (逆元の存在) が成立しないので、$\boldsymbol{N}$ は、乗法に関して群にならない。

[例題 4] 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ から 0 を取り除いた集合を $\boldsymbol{Q}^*(= \boldsymbol{Q} - \{0\})$ とすると、$\boldsymbol{Q}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群になる。

(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Q}^*$ 上で、乗法は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Z}$ は加法に関して群を成す。

[10] ここでは、「自然数」を高校までと同様「正の整数 ($\boldsymbol{N} = \{1,2,3,...\}$)」と考えることにする。ただし、大学の数学では、自然数に 0 を含めるの普通である。

1. $\forall a,b,c \in \boldsymbol{Q}^*$に対して $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ なので、結合法則を満す。

2. $1 \in \boldsymbol{Q}^*$ であり、 $\forall a \in \boldsymbol{Z}$に対して $a \times 1 = 1 \times a = a$ なので、1 は $\boldsymbol{Q}^*$ の乗法に対する **単位元** である。

3. $\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素 a に対して、$x = 1/a$ とすれば、$x = 1/a \in \boldsymbol{Q}^*$ であり（ $0 \notin \boldsymbol{Q}^*$ であることに注意。)、$a \times x = a \times (1/a) = 1, x \times a = (1/a) \times a = 1$ となるので、$x = 1/a$ は、a の逆元となる。すなわち、$\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素に対して、逆元が存在する。

これらを参考に、次の問題を解きなさい。

問題 154

1. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、加法に関して群となることを示せ。

2. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、乗法に関して群とならないことを示せ。

3. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から 0 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(= \boldsymbol{C} - \{0\})$ は、乗法に関して群になることを示せ。

問題 155　　複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から -2 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(= \boldsymbol{C} - \{-2\})$ 上の演算 $\cdot$ を $x \cdot y = (x+2)(y+2) - 2$ と定義する。ここで、$\boldsymbol{C}^*$ は $\cdot$ に関して群を成すことを示すために、以下の問いに答えよ。

1. 演算 $\cdot$ が結合法則を満す。すなわち $\forall x,y,z \in \boldsymbol{C}^*[(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$ であることを示せ。

2. 演算 $\cdot$ の単位元、即ち $\forall x \in \boldsymbol{C}^*[x \cdot e = e \cdot x = x]$ となる e を求めよ。

3. $a(\in C^*)$ の逆元、即ち $a \cdot x = x \cdot a = e$ となる x を a を用いて表せ。

問題 156　　K (K は C(複素数) あるいは、R(実数) を考えている。) を成分とする n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K) = \{A|A$ は n 次正方行列$\}$ は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理をみたしていることをそれぞれ示せばよい。)。

問題 157　　n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K)$ は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理の少くても一つは成立していないので、その成立していない公理を示し、どのような場合に成立していないかを述べればよい。)。

問題 158　　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n,K) = \{A|A$ は n 次の正方行列で、逆行列を持つ$\}$ は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 159　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n, K)$ は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 160　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 161　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 162　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい。

問題 163　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 164　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.6 の類題 1 の 1. の (1)
2. p.6 の類題 1 の 1. の (2)
3. p.6 の類題 1 の 2.
4. p.6 の類題 1 の 3. の (1)
5. p.6 の類題 1 の 3. の (2)
6. p.6 の類題 1 の 3. の (3)

問題 165　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.7 の類題 2 の 1. の X
2. p.7 の類題 2 の 1. の Y
3. p.7 の類題 2 の 2. の X
4. p.7 の類題 2 の 2. の Y
5. p.8 の類題 3 の A
6. p.8 の類題 3 の B
7. p.8 の類題 3 の C

[対称行列と交代行列]

n 次行列 A が $A={}^tA$ をみたすとき A を対称行列といい、$A=-{}^tA$ をみたすとき A を交代行列という。

問題 166 行列 A が交代行列ならば、A の対角要素は 0 であることを示せ。

問題 167 行列 A が、対称行列かつ交代行列ならば、実は、A は、零行列 O であること示せ。

問題 168

1. 対称行列 A, B の和 $A+B$ も対称行列になることを示しなさい。
2. 交代行列 C, D の和 $C+D$ も交代行列になることを示しなさい。
3. 交代行列 C の二乗 C^2 は、対称行列になることを示しなさい。

問題 169

1. n 次行列 B の (i,j) 成分を b_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ とする。この時、次の行列の (i,j) 成分を求めよ。

$$1.\quad {}^tB,\quad 2.\quad B+{}^tB,\quad 3.\quad B-{}^tB.$$

2. n 次行列 B が与えられたとき $B+{}^tB$ は対称行列であることを示せ。また $B-{}^tB$ は交代行列であることを示せ。

問題 170 正方行列 A は、対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを示せ。

問題 171 演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.1 を解きなさい。

問題 172 演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.2 を解きなさい。

問題 173

1. 正方行列 A の左右から正則行列 P, Q をかけたところ $PAQ=E$ となったとする。(ただし、E は単位行列である。) A は正則行列であることを示し、A^{-1} を P, Q を用いて表わせ。
2. 正方行列 A に行および列に関する基本変形を何回か施したところ単位行列になったとする。このとき、A は正則行列であることを示せ。

[行列の冪と冪零[11]]

n 次正方行列 A に対して、A を k 回掛けた結果を A の k 回の**冪** *(***巾***)* と呼び A^k で表す。特に、任意の行列に対して $A^0 = E$ (E は単位行列) と定める[12]。

n 次正方行列 A に対して、ある自然数 $k > 0$ が存在して $A^k = O$(O は零行列) である時、この行列 A は、**冪(巾)零行列**と呼ぶ[13]。また、冪零行列 A に対して、k より小さい数では、O にならないが、k で初めて、O になる時、この k を冪零行列 A の**次数**と呼ぶことにする。なお、O (零行列) の次数は 1 であり、逆に、次数が 1 の冪零行列は O のみである。

問題 174

行列 A, B が共に冪零行列で、その次数が、それぞれ k, j とし、$AB = BA$ を満す時、次の問に答えなさい。

1. 二つの行列の積 AB が冪零行列であることを示し、その次数の最大値[14]m を k, j で表しなさい。また、実際に、AB の次数が m になる例と、ならない[15]例をそれぞれ示しなさい。

2. 二つの行列の和 $A + B$ が冪零行列であることを示し、その次数の最大値 m を k, j で表しなさい。また、実際に、$A + B$ の次数が m になる例と、ならない例をそれぞれ示しなさい。

問題 175 次のような n 次の正方行列 $J_n = \{\delta_{i,i-1}\}$ が冪零行列であることを示し、その次数を求めなさい。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 176 行列 A が冪零行列ならば、$|A| = 0$ を示せ。

問題 177 A が冪零行列の時、e^A を次のように定義する[16]。

---

[11]「冪」、「冪零」は、それぞれ「べき」、「べきれい」と呼ぶ。
[12]$O^0 = E$ であることに注意。
[13]教科書 p.71 章末問題 6. を参照のこと。
[14]必ず、$(AB)^m = O$ となる様な m の内、最小の数を求める。次の問いも同様。
[15]m は、次数の最大値なので、m より小さい数で O になってしまう場合があり得る。
[16]形式的には無限和だが、A が冪零なので、実質は有限和であることに注意

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

この時、次の問に答えなさい。

1. $e^O = E$ であることを示しなさい。ただし、O, E はそれぞれ、零行列、単位行列とする。
2. 冪零行列 A, B が、$AB = BA$ を満すならば、e^A と e^B の積 $e^A e^B$ が $e^{(A+B)}$ になることを示しなさい。
3. e^A は正則であることを示しなさい。
4. 正則な行列 Q に対して、$e^{(Q^{-1}AQ)} = Q^{-1}(e^A)Q$ を示しなさい。

問題 178　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.9 を解きなさい。

問題 179　演習書の p.17 の類題 11 を解きなさい。

問題 180　演習書の p.73 の類題 2 を解きなさい。

問題 181　G を平面上の合同変換[17]全体の集合とする。この時、次の問いに答えなさい。

1. $T, S \in G$ (すなわち、T, S が合同変換) の時、T, S の合成 $T \cdot S$ (ここでは $T \cdot S(x) = T(S(x))$ と定義する) もまた、合同変換 (すなわち、$T \cdot S \in G$) であること示せ。
2. 任意の $T, S, U \in G$ に対し、$(T \cdot S) \cdot U = T \cdot (S \cdot U)$ を示せ。なお、この時、教科書 p.63 の定理 [7.1] を利用してよい。
3. 任意の $T \in G$ に対し、$(T \cdot E) = E \cdot T = T$ となる合同変換 E とは何か、言葉で説明しなさい。
4. 任意の $T \in G$ に対して、ある $S \in G$ が存在し、前問の E に対して、$T \cdot S = S \cdot T = E$ となることを示せ。
5. G は、合成 $(\cdot)$ に関して群になることを示せ。

問題 182　G を平面上の運動[18]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

[17]教科書 p.68 を参照
[18]教科書 p.69 参照

問題 183　G を平面上の回転[19]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 184　G を平面上のアフェイン変換[20]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 185　演習書の p.25 の類題 1 を解きなさい。

問題 186　演習書の p.27 の類題 3 を解きなさい。

問題 187　演習書の p.11 の類題 5 を解きなさい。

問題 188　次の行列が逆行列を持つための α の条件を定めよ。またその時の逆行列は何か。

1. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2-\alpha & 3 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 189　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.7 を解きなさい。

問題 190　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.1 を解きなさい。

問題 191　n の置換の個数が、$n!$ [21] であることを示せ。

問題 192　n の置換全体の集合は、置換の合成に関して、群[22]になることを示せ。

問題 193　偶置換全体の集合[23]は、置換の合成に関して、群になる[24] ことを示せ。

問題 194　n の置換 σ は次のような互換の積で、一意に表すことができることを示せ。ただし、$p_i > q_i$, $p_i > p_{i+1}$, $k < n$ となる。

$$\sigma = (p_1, q_1)(p_2, q_2)..(p_k, q_k)$$

---

[19]教科書 p.69 参照

[20]教科書 p.70 参照

[21]$n!$ は n の階乗と呼び、$n! = n \times (n-1) \times .. \times 2 \times 1$ である。

[22]この群を「n 次の対称群」と呼び S_n で表します。

[23]偶置換全体は、置換全体の部分集合になっている。このように、ある群の部分集合が、同じ演算に関して、やはり群をなす場合に、この部分集合を「部分群」と呼ぶ。すなわち、偶置換全体の集合は、置換全体の集合の部分群である。

[24]この群を「n 次の交代群」と呼び A_n で表します。

[巡回置換]
6 の置換の内、例えば、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

は、0 を 3 に、3 を 4 に、そして 4 を 0 に変換している。このように、n の置換の内 $k(\leq n)$ 個の要素を順番に入れ替えるような置換を、**巡回置換**と呼び、その入れ替える要素を並べて表す（上の例では、$(0,3,4)$ と表す）。また、入れ替える要素の個数を巡回置換の長さ（上の例では 3）と呼ぶ。互換は、循環置換の特別な場合（すなわち $k=2$ の場合）と考えることができる。

この時、次の問に答えよ。

問題 195　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ の逆置換が、再び、長さ k の逆置換になることを示しなさい。また、この時、その逆置換は、どのような形になるか？

問題 196　長さ k の巡回置換の一つを σ とする。この時、置換の集合 $\{\sigma, \sigma^2(=\sigma\sigma), \sigma^3, .., \sigma^k\}$ が群になることを示しなさい。

問題 197　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ が、次のような $k+1$ 個の互換の積で表現できることを示しなさい。

$$(a_1, a_2, .., a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_2)(a_2, a_3)..(a_{k-1}, a_k)(a_1, a_k)$$

問題 198　任意の置換は、巡回置換の積で表現できることを示せ。

問題 199　行列式の定義に従って 4 次の行列式を求めなさい。

問題 200　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.11 を解きなさい。

問題 201　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.12 を解きなさい。

問題 202

1. A が直交行列ならば $\det A = \pm 1$ であることを示せ。
2. A がエルミート行列ならば $\det A$ は実数であることを示せ。
3. A がユニタリ行列ならば $\det A$ は絶対値が 1 の複素数であることを示せ。

問題 203　$\det {}^tA = A$ と $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ を用いて $\det A^* = \overline{\det A}$ を証明せよ。

問題 204　正則行列は基本行列の積で表すことができることと，$|AB| = |A||B|$ を用いて正則行列の行列式は 0 ではないことを示せ。

問題 205　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.13 を解きなさい。

問題 206　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.14 を解きなさい。

問題 207　演習書の p.30 の 類題 6 を解きなさい。

問題 208　次の基本行列の行列式を求めなさい。

1.　$P_n(i,j)$,　2.　$Q_n(i;c)$,　3.　$R_n(i,j,c)$.

問題 209　演習書の p.13 の 1 章の類題 7 を解きなさい。

問題 210　演習書の p.13 の 1 章の類題 8 を解きなさい。

問題 211　冪零行列[25] は正則でないことを示せ。(ヒント：A が正則ならば $|A| \neq 0$ であることと、$|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 212　演習書の p.31 の 類題 7 を解きなさい。

問題 213　演習書の p.32 の 類題 8 を解きなさい。

問題 214　直交行列[26]A の行列式 $|A|$ の値を求めよ。(ヒント：$|E| = 1$, $|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 215　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.3 を解きなさい。

問題 216　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.4 を解きなさい。

問題 217　実行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ に対し、次の行列式を求めよ。

1.　$\det X$,　2.　$\det(E - X)$.

問題 218　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.5 を解きなさい。

問題 219　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.6 を解きなさい。

---

[25] A が冪零行列であることの定義は、ある自然数 n が存在し、$A^n = O$ (ただし、O は零行列) となることである。

[26] A が直交行列であることの定義は、${}^tAA = E$ となることである。

問題 220　次の行列式を因数分解せよ。

$$1.\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad 2.\quad \begin{vmatrix} x & i & 1 & -i \\ -i & x & i & 1 \\ 1 & -i & x & i \\ i & 1 & -i & x \end{vmatrix}$$

問題 221　演習書の p.75 の 5 章の類題 4 を解きなさい。

問題 222　演習書の p.76 の 5 章の類題 5 を解きなさい。

問題 223　次の等式を証明せよ。

$$1.\quad \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$2.\quad \begin{vmatrix} na_1+b_1 & na_2+b_2 & na_3+b_3 \\ nb_1+c_1 & nb_2+c_2 & nb_3+c_3 \\ nc_1+a_1 & nc_2+a_2 & nc_3+a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2-n+1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

問題 224　演習書の p.78 の 5 章の類題 6 を解きなさい。

問題 225　演習書の p.80 の 5 章の類題 7 を解きなさい。

問題 226　次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

問題 227　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.8 を解きなさい。

問題 228　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.10 を解きなさい。

問題 229　A を 3 次行列とする。このとき次の行列の行列式の値を $|A|$ を用いて表わせ。

$$1.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A$, 4. $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

5. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 230 演習書の p.33 の 類題 9 を解きなさい。

問題 231 演習書の p.34 の 2 章の問題の 2.2 を解きなさい。

問題 232 演習書の p.34 の 2 章の問題の 2.3 を解きなさい。

問題 233 演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.4 を解きなさい。

問題 234 行列 A がエルミート行列[27] の時、$E + iA, E - iA$ が何れも正則行列であることを示せ。

問題 235 演習書の p.105 の 類題 2 を解きなさい。

問題 236 演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.10 の類題 10 の 1.
2. p.10 の類題 10 の 2. の (1)
3. p.10 の類題 10 の 2. の (2)

問題 237

1. 行列 X が実対称行列、Y が実交代行列の時、$A = X + iY$ で表される複素行列 A は、エルミート行列であることを示せ。
2. 逆に、複素行列 A が、エルミート行列であれば、ある実対称行列 X と実交代行列 Y が存在し、$A = X + iY$ と一意に表すことができることを示せ。

問題 238 演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.5 を解きなさい。

問題 239 演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.6 を解きなさい。

[27]行列 A がエルミート行列であることの定義は、行列 A が $A = A^*$ を満すことを言う。ただし、$A^* = \overline{{}^t A}$ である。

問題 240

1. 行列 A がエルミート行列の時、$U = (E - iA)(E + iA)^{-1}$ で定義される行列 U は、ユニタリー行列[28] で、かつ $|E + U| \neq 0$ であることを示せ。

2. 行列 U が $|E + U| \neq 0$ を満す、ユニタリー行列の時、$A = i(U + E)^{-1}(U - E)$ で定義される行列 A がエルミート行列であることを示せ。

問題 241　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.7 を解きなさい。

問題 242　演習書の p.61 の 類題 2 を解きなさい。

問題 243　行列 A, B が共にエルミート行列ならば、次の行列もまた、エルミート行列になるということを示せ。

1. $A + B$,　2. $AB + BA$,　3. $i(AB - BA)$

問題 244　演習書の p.62 の 類題 3 を解きなさい。

問題 245　演習書の p.63 の 類題 4 を解きなさい。

問題 246　$A_1, A_2, .., A_n$ がエルミート行列の時、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i^2 = O$ ならば、実は、$A_i = O(i = 1, 2, .., n)$ であることを示せ。

問題 247　演習書の p.64 の 類題 5 を解きなさい。

問題 248　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.2 を解きなさい。

問題 249　A がエルミート行列ならば、$|A|$ は実数であることを示せ。

問題 250　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.3 を解きなさい。

問題 251　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.4 を解きなさい。

問題 252　A がエルミート行列, B が正則行列ならば、B^*AB もエルミート行列になることを示せ。

問題 253　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.5 を解きなさい。

問題 254　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.6 を解きなさい。

---

[28] 行列 A がユニタリー行列であることの定義は、行列 A が $A^* = A^{-1}$ を満すことを言う。

問題 255　次の行列の Rank (階数) を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ y & 1 & x \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 256　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.7 を解きなさい。

問題 257　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.9 を解きなさい。

問題 258　行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. 四つの変数 x, a, b, c に関するヴァン=デルモント行列式[29]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \Delta(x, a, b, c)$$

   が、三つの変数 a, b, c に関する差積 $\Delta(a, b, c)$ と、x に関する三次の多項式 $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ を用いて、$\Delta(x, a, b, c) = \Delta(a, b, c) f(x)$ と表現できることを示せ。また、この時、係数 α, β, γ を変数 a, b, c を用いて表せ。

2. 同じく、前問の行列式の 1 列目に関する行列式の展開[30]を求めよ

3. 前の二つの問題の結果を用いて、冒頭の行列式の値を、三つの変数 a, b, c の式と差積 $\Delta(a, b, c)$ の積の形で表したものを求めよ。

4. 同様にして行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

   の値を求めよ。

[29]Text p.82 参照。
[30]Text p.85 参照

問題 259　自然数 n, m は、$n > m$ を満すとし、A を (n, m) 行列、B を (m, n) 行列とする。この時、二つの行列の積 AB (これは、n 次の正方行列になることに注意) の行列式 $|AB|$ は常に 0 になることを示せ。(ヒント：A に、全ての要素が 0 の行を下に $(n-m)$ 行追加した行列 A' と、B に、全ての要素が 0 の列を右に $(n-m)$ 列追加した行列 B' の、共に n 次の行列を作り、その積 $A'B'$ を計算すると..)

問題 260　演習書の p.83 の 5 章の問題 5.1 を解きなさい。

問題 261　演習書の p.83 の 5 章の問題 5.2 を解きなさい。

問題 262　次の行列 A について以下の問い答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. B を次のような行列とする時、$A = B({}^tB)$ であることを示せ。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^3 \end{pmatrix}$$

2. 行列式 $|A|$ の値を、三つの変数 a, b, c の差積 $\Delta(a, b, c)$ を用いて表せ。

問題 263

共に零ベクトルではない、二つの三次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を取り、その二つのベクトルの外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{c}$ とする時、次の問いに答えなさい。

1. $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{c}|^2$ を示せ。

2. もし、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するならば、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ をそれぞれ自分自身の長さで割ったベクトルを要素とする行列 $A = (\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}, \frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|})$ は直交行列であることを示せ。

問題 264　演習書の p.83 の 5 章の問題 5.3 を解きなさい。

問題 265　演習書の p.84 の 5 章の問題 5.4 を解きなさい。

問題 266　次の行列式を因数分解しなさい。

1.

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

問題 267　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.9 を解きなさい。

問題 268　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.10 を解きなさい。

問題 269　n 次の正方行列 A が確率行列[31] で、n 次の縦ベクトル $\vec{p}$ が確率ベクトル[32] の時、$A\vec{p}$ もまた、確率ベクトルになること示せ。

問題 270　演習書の p.81 の 5 章の類題 8 を解きなさい。

問題 271　演習書の p.81 の 5 章の類題 9 を解きなさい。

問題 272

8 つの部屋 (1 から 8 の数字が振られている) があり、その何れかの部屋に人がいるとする (下の例では、現在 5 番目の部屋に人がいる)。

1	2	3	4	5	6	7	8
				○			

一日に一度、コイン[33]を投げ、表が出れば左の部屋へ、裏が出れば右の部屋に移るとする。ただし、移動先がない場合[34]は、その部屋に留まるとする。

この時、次の問いに答えなさい。

---

[31]行列 $A=(a_{ij})$ が確率行列であることの定義は、その成分が非負で、しかも、その全ての行において、成分の和が 1 になること、即ち $a_{ij} \geq 0, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1\,(i=1..n)$ であることを言う。(cf. 教科書 p.73)

[32]$\vec{p}=(p_i)$ が確率ベクトルであることの定義は、その成分が、全て非負で、かつ、その和が 1 となることである。即ち、$p_i \geq 0, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ の場合を言う。

[33]このコインは、歪んでおらず、投げると正確に $\frac{1}{2}$ の確率で表かあるいは裏のどちらかが出るとする。

[34]1 番目の部屋で表が出た場合と、8 番目の部屋で裏が出た場合

1. 本日、i 番目の部屋にいる確率を $\vec{p} = (p_i)$、次の日に i 番目の部屋にいる確率を $\vec{q} = (q_i)$ とした時 $\vec{q} = A\vec{p}$ となるような行列 A を求めなさい。

2. 初日は、1 番目の部屋にいた (即ち $\vec{p_1} = (p_{1i})$ の時、$p_{11} = 1, p_{1i} = 0 (i = 2, .., 8)$ となる) とすると、4 日目 (即ち、3 度コインを投げる) に、再び、部屋 1 に居る確率を求めなさい。

3. A^n を求めなさい。

4. $\vec{p_0}$ を確率ベクトルとし、確率ベクトルの列 $\{\vec{p_n}\}$ を、 $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p_n}$ で定義すると、最初の確率ベクトル $\vec{p_0}$ に拘らず、このベクトル列が収束することを示しなさい。

問題 273　演習書の p.84 の 5 章の問題 5.5 を解きなさい。

問題 274　演習書の p.84 の 5 章の問題 5.6 を解きなさい。

問題 275　A 君, B 君, C 君, D 君, E 君の 5 人は、それぞれ自分のホームページを作成し、互いに見せあって、自慢することにした。そして、もし、自分以外の人のホームページを見て、これは面白いと思ったならば、自分のページにその面白いと思ったページへのリンクを作成することにした。

暫くして、各自のホームページも作成され、内容の評価が済み、その結果として、次のようなリンクが行われた (A 君は E 君以外の三人のページにリンクをはったが A 君のページにリンクをしたのは E 君だけだった)。

リンク元 ＼ リンク先	A	B	C	D	E
A		◯	◯	◯	
B			◯		◯
C		◯			◯
D			◯		◯
E	◯				

その後、5 人は、誰のページが一番良いかを議論することになった。その結果、次のような結論[35] になった。

- もし、そのページが価値があるならば、他の人からリンクされているに違いない (リンクされているページは評価が高い)。
- そのリンクの価値は、リンク元の価値に比例するに違いない (価値のあるページからリンクされるページは評価が高い)。

[35] cf. Google の人気の秘密 (`http://www.google.co.jp/intl/ja/why_use.html`)

- そのリンクは価値は、リンク元のリンク量に反比例するに違いない（できるだけ価値のあるページだけをリンクする）。

この結論を、5 人のホームページの評価を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ととして、関係式で表現すると次のようになった。

$$\begin{cases} x_1 &= & & & & & \frac{1}{1}x_5 \\ x_2 &= & \frac{1}{3}x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & & \\ x_3 &= & \frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & \\ x_4 &= & \frac{1}{3}x_1 & & & & \\ x_5 &= & & \frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & \end{cases}$$

この時、次の問いに答えなさい。

1. 縦ベクトル $\vec{x} = (x_i)$ を考え、上記の関係式を行列とベクトルを用いて表すと、$\vec{x} = A\vec{x}$ となる。このような行列 A を求めなさい。
2. A^n を求めなさい。
3. $x_0 = {}^t(1, 0, 0, 0, 0)$ とし、$x_{n+1} = Ax_n$ とすると、$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ が収束することを示しなさい。
4. x_∞ は、$x_\infty = Ax_\infty$ を満すことを示しなさい。
5. この評価法で、 A 君から E 君の内、一番評価が高いのは誰のページか。

問題 276　演習書の p.84 の 5 章の問題 5.7 を解きなさい。

問題 277　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.8 を解きなさい。

問題 278　(m, n) 型の行列 A, B に対して、$PAQ = B$ を満す、正則な行列 P, Q（ただし、P は、n 次の正方行列で、Q は、m 次の正方行列となる）が存在する時に、$A \sim B$ で表し、A と B は、同値であると呼ぶことにする。この時、次の三つが成立することを示せ。

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

問題 279　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.11 を解きなさい。

問題 280　演習書の p.85 の 5 章の問題 5.12 を解きなさい。

問題 281　$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) \Leftrightarrow A \sim B$ を示せ。

問題 282　演習書の p.86 の 5 章の問題 5.15 を解きなさい。

問題 283　演習書の p.86 の 5 章の問題 5.16 を解きなさい。

問題 284　二つの多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, g(x) = px^2 + qx + r$ に対して、次の行列式 $R(f, g)$ をこの二つの多項式の終結式と呼ぶ。

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}$$

この時、「二つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が同じ根を持つこと」と、「$R(f, g) = 0$ が成立すること」が必要十分条件になっていることを示せ。

問題 285　演習書の p.67 の 4 章の問題 4.8 を解きなさい。

問題 286

1. A, B が n 次正方行列の時、次の式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{vmatrix} = 4^n |A||B|$$

2. 次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b-c-d & a-b+c-d & a-b-c+d \\ a+b-c-d & a+b+c+d & a-b-c+d & a-b+c-d \\ a-b+c-d & a-b-c+d & a+b+c+d & a+b-c-d \\ a-b-c+d & a-b+c-d & a+b-c-d & a+b+c+d \end{vmatrix}$$

問題 287　$f(x) = a\cos x + b\sin x$ という形をした関数全体の集合を $F(= \{a\cos x + b\sin x | a, b \in R\})$, 二次元の実ベクトルの集合を $V(= \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in R\})$ で、それぞれ表すとする。この時に次の問いに答えなさい。

1. $f(x) \in F$ ならば、f を微分した $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ も F の要素であることを示せ。
2. 上記の F 上の変換 $D(f) = f'$ は、全単射であることを示せ。

3. $f(x) = a\cos x + b\sin x \in F$ に対して、二次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$ を対応させる写像 $v = \varphi(f)$ を考える。すると、この写像 $\varphi(f)$ は、全単射であることを示せ。

4. V 上の変換 $\bar{D}(v) = \varphi(D(\varphi^{-1}(v)))$ が全単射であることを示せ。

5. 上記の変換 $\bar{D}$ には、ある 2×2 の実行列 A_D があり、$\bar{D}(v) = A_D v$ と表現できることを示せ。

6. 変換 D の逆変換を S とすると、上記と同様に定義される $\bar{S} = \varphi(S(\varphi^{-1}(v))$ も、ある行列 A_S があり、$S(v) = A_S v$ となることを示せ。

7. A_S は、A_D 逆行列であることを示せ。

8. 上記の性質を利用して、F 上の微分方程式 $f'(x) = \cos x + \sin x$ の解の内、F に含まれるものを求めよ。

9. 同様にして F 上の微分方程式 $f''(x) + 2f'(x) = \cos x$ の解の内 F に含まれるものを求めよ。

問題 288　次の行列を A とする。A に行に関する基本変形を行い階段型の行列 A' にせよ。またそのとき $A' = PA$ となるような正則行列 P を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,

問題 289　次の行列が逆行列を持つかどうかを判定し，逆行列を持つときには逆行列を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　4. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} i & 1+i & -1 \\ 1-i & 2i & 2 \\ 1 & -1+i & 3i \end{pmatrix}$　6. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　7. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

問題 290 次の行列を A としたとき PAQ が A の階数標準形になるように正則行列 P, Q を定めよ。

1. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

問題 291 次の行列を基本行列の積で表しなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 292 次の等式を満たすように置換 τ を定めよ。

1. $a_{\sigma(1)3}a_{\sigma(2)4}a_{\sigma(3)2}a_{\sigma(4)1} = a_{\sigma\tau(1)1}a_{\sigma\tau(2)2}a_{\sigma\tau(3)3}a_{\sigma\tau(4)4}$

次の等式を満たすように置換 τ を σ を用いて表せ。

2. $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)} = a_{\tau(1)1}a_{\tau(2)2}a_{\tau(3)3}a_{\tau(4)4}$

問題 293 演習書の p.86 の 5 章の問題 5.17 を解きなさい。

問題 294 演習書の p.86 の 5 章の問題 5.18 を解きなさい。