

# 代幾 I 計算演習 [問題] (2006/12/07)

問. 次の行列の行列式を求めなさい

Q.1

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Q.6

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Q.2

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Q.7

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Q.3

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Q.8

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Q.4

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Q.9

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Q.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Q.10

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

# 代幾 I 計算演習 [解答] (2006/12/07)

A.1

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

左 R(2,1;1) ; 2行目に1行目を1倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

左 R(3,1;-2) ; 3行目に1行目を-2倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

左 R(4,1;-2) ; 4行目に1行目を-2倍して、加える

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

左 P(3,2) ; 3行目と2行目を交換

$$= 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

左 R(4,2;-\frac{3}{2}) ; 4行目に2行目を-\frac{3}{2}倍して、加える

$$= -2 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times (0 \times 0 - (-3) \times (-\frac{3}{2}))$$

$$= 9$$

A.2

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} && \text{左 R(2,1;-2); 2行目に1行目を } -2 \text{ 倍して、加える} \\
 &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} && \text{左 R(3,1;-1); 3行目に1行目を } -1 \text{ 倍して、加える} \\
 &= 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times (0 \times 2 - (-2) \times (-2)) \\
 &= -8
 \end{aligned}$$

A.3

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} && \text{左 R(3,1;-1); 3行目に1行目を } -1 \text{ 倍して、加える} \\
 &= -1 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -1 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} && \text{左 R(3,2;\frac{1}{2}); 3行目に2行目を } \frac{1}{2} \text{ 倍して、加える} \\
 &= -1 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} && \text{左 R(4,2;-\frac{1}{2}); 4行目に2行目を } -\frac{1}{2} \text{ 倍して、加える} \\
 &= -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -2 \times ((-1) \times 1 - (-1) \times (-1)) \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

A.4

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

左 R(2,1;1) ; 2行目に1行目を1倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

左 R(3,1;-\frac{1}{2}) ; 3行目に1行目を-\frac{1}{2}倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix}$$

左 R(4,1;-\frac{1}{2}) ; 4行目に1行目を-\frac{1}{2}倍して、加える

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

左 R(3,2;-\frac{1}{2}) ; 3行目に2行目を-\frac{1}{2}倍して、加える

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

左 R(4,2;\frac{3}{2}) ; 4行目に2行目を\frac{3}{2}倍して、加える

$$\begin{aligned} &= 2 \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \left( \frac{3}{2} \times 1 - 1 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

A.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{左 R(3,1;1) ; 3行目に1行目を1倍して、加える}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{左 R(4,1;2) ; 4行目に1行目を2倍して、加える}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{左 R(3,2;1) ; 3行目に2行目を1倍して、加える}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{左 R(4,2;4) ; 4行目に2行目を4倍して、加える}$$

$$\begin{aligned} &= -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times ((-1) \times 2 - 0 \times 5) \\ &= 2 \end{aligned}$$

A.6

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

左  $R(2,1;\frac{1}{2})$ ; 2行目に1行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

左  $R(3,1;-\frac{1}{2})$ ; 3行目に1行目を $-\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$= 2 \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

左  $R(3,2;-\frac{1}{3})$ ; 3行目に2行目を $-\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$= 2 \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

左  $R(4,2;-\frac{2}{3})$ ; 4行目に2行目を $-\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$= -3 \begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$= -3 \times \left( \frac{7}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} \times \frac{8}{3} \right)$$

$$= 10$$

A.7

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

左 R(2,1;-2) ; 2行目に1行目を-2倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

左 R(3,1;2) ; 3行目に1行目を2倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

左 R(4,1;-2) ; 4行目に1行目を-2倍して、加える

$$= -1 \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (2 \times 4 - (-3) \times (-1))$$

$$= 10$$

A.8

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{左 R(2,1;-2) ; 2行目に1行目を-2倍して、加える}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{左 R(3,1;-1) ; 3行目に1行目を-1倍して、加える}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{左 R(4,1;-2) ; 4行目に1行目を-2倍して、加える}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{左 P(3,2) ; 3行目と2行目を交換}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (0 \times (-1) - 0 \times 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$



A.9

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

左 R(3,1;  $-\frac{1}{2}$ ) ; 3行目に1行目を  $-\frac{1}{2}$  倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

左 R(4,1;1) ; 4行目に1行目を1倍して、加える

$$= -2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

左 P(4,2) ; 4行目と2行目を交換

$$= 2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times \left( \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 - \left(-\frac{5}{2}\right) \times (-2) \right)$$

$$= -12$$

A.10

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

左 R(2,1;1) ; 2行目に1行目を1倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

左 R(3,1;1) ; 3行目に1行目を1倍して、加える

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

左 R(4,1;1) ; 4行目に1行目を1倍して、加える

$$= -1 \begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -4 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

左 R(3,2;-1) ; 3行目に2行目を-1倍して、加える

$$= -1 \begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{11}{4} \end{vmatrix}$$

左 R(4,2;-\frac{1}{4}) ; 4行目に2行目を-\frac{1}{4}倍して、加える

$$\begin{aligned} &= 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ \frac{7}{4} & \frac{11}{4} \end{vmatrix} \\ &= 4 \times (3 \times \frac{11}{4} - (-1) \times \frac{7}{4}) \\ &= 40 \end{aligned}$$